

基于预处理稳定双正交共轭梯度重启全纯嵌入的电-气综合能源系统能流计算方法

曹宇鑫, 职梦磊, 李雪

(现代电力系统仿真控制与绿色电能新技术教育部重点实验室(东北电力大学), 吉林省吉林市 132012)

摘要:【目的】能流计算是综合能源系统(integrated energy system, IES)规划和运行的基础, 现有全纯嵌入法在求解大规模 IES 能流时, 求解幂级数系数方程组及 Padé 近似过程所需计算量较大, 耗时较长。文章提出一种基于预处理稳定双正交共轭梯度(bi-conjugate gradient stabilized, BICGSTAB)重启全纯嵌入的电-气 IES 能流计算方法。【方法】该方法基于预处理 BICGSTAB 和常项值与多项式全乘法(total multiplication of polynomial, TMP)进行电网侧全纯嵌入潮流计算, 并采用重启全纯嵌入法进行气网侧能流计算。在求解电网侧潮流时, 首先对求解幂级数系数方程组的系数矩阵进行预处理, 其次利用基于常项值的全纯嵌入潮流计算方法中的常项值动态更新机制, 采用 Padé 近似与 TMP 结合的方法计算电压逼近值; 在求解气网侧能流时, 采用重启全纯嵌入方法计算气网能流, 以提高计算速度及能流收敛性; 最后, 通过 E39-G20 和 E2383-G60 测试系统算例进行验证。【结果】所提方法与牛顿拉夫逊法相比, 最大相对误差仅为 0.051 3%, 计算加速比最大达到 358.088 3。【结论】所提方法可实现电-气 IES 能流准确、高效求解, 且在各种工况下仍能准确求解 IES 能流, 具有较强的鲁棒性, 为 IES 能流计算的高效求解提供一种新思路。

关键词: 能流计算; 全纯嵌入法; 多项式全乘法; 预处理器

中图分类号: TM744

文献标志码: A

文章编号: 1000-7229(2026)08-0140-21

DOI: 10.12204/j.issn.1000-7229.2026.08.010

Energy Flow Calculation Method for Electric-Gas Integrated Energy System Based on Preprocessed Bi-Conjugate Gradient Stabilized Restarted Holomorphic Embedding

CAO Yuxin, ZHI Menglei, LI Xue

(Key Laboratory of Modern Power System Simulation and Control & Renewable Energy Technology, Ministry of Education (Northeast Electric Power University), Jilin 132012, Jilin Province, China)

ABSTRACT: [Objective] Energy flow calculation is fundamental to the planning and operation of integrated energy systems (IES). The existing holomorphic embedding method requires significant computational effort and long solution times for large-scale IES due to the need for solving coefficient equations of power series and the Padé approximation process. [Methods] This paper proposes an energy flow calculation method for electrical-gas IES based on preconditioned bi-conjugate gradient stabilized (BICGSTAB) restarted holomorphic embedding. The method combines preconditioned BICGSTAB and total multiplication of polynomial (TMP) for grid-side holomorphic embedding power flow calculation, while employing the restarted holomorphic embedding method for gas network energy flow calculation. When solving the power flow at the grid side, the coefficient matrix for solving the power series coefficient equations is first preconditioned; then, the constant value dynamic update mechanism in the Holomorphic Embedding Load Flow Method based on constant values is used to solve the voltage approximation value by using Padé approximation and TMP. When solving the side energy flow of gas network, the restarted holomorphic embedding method is used to calculate the energy flow of gas network, so as to improve the calculation speed and convergence of energy flow. Finally, the proposed method is validated using the E39-G20 and E2383-G60 test systems. [Results] The results demonstrate that the proposed method achieves a maximum relative error of only 0.051 3% compared to the Newton-Raphson method, with a maximum computational speedup ratio of 358.0883. [Conclusions] The

proposed method enables accurate and efficient energy flow analysis in the electricity-gas IES, maintains high IES energy flow solution accuracy under various operating conditions, and offers strong robustness, which can provide a new idea for the efficient calculation of IES energy flow.

This work is supported by National Natural Science Foundation of China (No. 52577088) and Natural Science Foundation of Jilin Province (Excellent Youth Fund Project) (No. 20230101374JC).

KEYWORDS: energy flow calculation; holomorphic embedding method; total multiplication of polynomial; precondition

0 引言

随着化石燃料储量逐渐减少、环境污染问题日益突出,世界各国正积极推动能源转型^[1-3]。综合能源系统(integrated energy system, IES)具有多种能源互补耦合、促进可再生能源消纳、提升能源利用率等优势,已得到广泛应用^[4-5]。能流计算是获取并分析IES状态信息、评估系统安全性的基础^[6-8]。能流计算结果可为系统安全防护提供决策依据,驱动多能互补协同优化,提升能源综合利用效率^[9-10]。因此,研究IES的高效能流计算方法具有重要意义。

当前,IES的能流计算分析方法主要包含统一求解法^[11]和分解求解法^[12]。统一求解法将各子系统的能流方程联立求解,可同时获取所有子系统的状态变量^[13],然而,随着系统规模扩大,状态变量增多,方程组维数升高,使用统一求解法时易出现计算负担加重、收敛性变差、计算时间显著增加等问题^[14]。分解求解法则按耦合节点将系统解耦为多个子系统,再独立求解各子系统的能流^[15]。上述两类方法在求解能流时通常以牛顿拉夫逊(Newton-Raphson, NR)法为基础^[16-17],但NR法对初值依赖性较强,当初值偏离真解较远时,可能导致计算耗时增加,甚至计算结果发散^[18]。

为避免NR法在求解非线性方程组中的不足,文献[19]基于复分析理论,提出了一种计算电力系统潮流的全纯嵌入方法(holomorphic embedding load flow method, HELM)。该方法不依赖初值,亦不需形成雅可比矩阵,有良好的收敛性。在此基础上,文献[20]提出了一种基于常项值的全纯嵌入潮流计算方法(holomorphic embedding load flow method based on constant values, CHELM),通过动态更新常项值,避免计算高阶项幂级数系数,显著提高了潮流求解效率;文献[21]提出了一种快速灵活全纯嵌入(fast and flexible holomorphic embedding, FFHE)潮流计算方法,该方法可灵活选取嵌入方程的胚解(germ solution),当胚解选取合理时,可以加速收敛并减少计算时间。此外,全纯嵌入法已拓展至IES能流求解中,文献[22]将HELM应用于气网稳态建模,提出了一种灵活型全纯嵌入的电-气多能流计算方法;文献

[23]建立了电-气-热综合能源系统的全纯嵌入能流模型,对气网与热网侧的能流方程进行重构,并采用分解求解法进行求解。但采用HELM求解IES能流时,存在幂级数求解、待求变量有理逼近值求解过程效率偏低及初值依赖性的问题。

针对HELM求解幂级数系数过程中出现的高维线性方程组,常用的求解方法有直接法^[24]和迭代法^[25]两类。直接法基于稀疏矩阵分解技术,逐一求解各待求量,但当方程组规模增大时,计算复杂度随之上升,导致计算耗时增加^[26];迭代法基于矩阵向量运算,计算复杂度较低,适用于求解大型稀疏线性方程组。但采用迭代法求解修正方程组时,通常需对潮流雅可比矩阵进行预处理^[27-28],从而压缩其特征值分布区间,提高迭代法收敛性。文献[29]采用Krylov子空间法中的预处理稳定双正交共轭梯度(bi-conjugate gradient stabilized, BICGSTAB)法迭代求解修正方程组,并构造雅可比矩阵的稀疏矩阵近似逆预处理器,显著改善了雅可比矩阵的特征值分布区间,减少了BICGSTAB的迭代次数,提升了收敛性;文献[30]提出了一种基于近似逆预处理的BICGSTAB并行迭代方法,用于求解HELM的幂级数系数线性方程组,提升了求解速度,但在部分复杂系统中,由于线性方程组维数过高,可能出现不收敛的问题。

针对HELM中节点电压幂级数的有理逼近计算,文献[21]引入行列式比值法来同时计算所有节点的电压值,但该方法难以有效降低电压幂级数的有理逼近次数,计算效率提升不明显;文献[31]提出一种多项式全乘法(total multiplication of polynomial, TMP),避免了传统HELM对Padé近似的依赖,从而降低由此带来的计算成本,但其收敛性难以保证。

针对电-气IES能流求解,文献[32]将多维全纯嵌入法应用于天然气系统多场景能流的快速计算;文献[33]结合IES分解求解法与全纯嵌入法的特点,提出一种基于幂级数系数分向传递的递归型电-气-热多能流算法。然而,上述方法仍存在对初值依赖性强的问题,若初值选取不当,将影响计算收敛性与计算效率。

综上,采用HELM求解IES能流时仍存在以下问题:在求解大规模系统能流时,收敛所需幂级数阶数

较高,且需多次求解幂级数系数方程组,导致求解效率下降,甚至无法收敛;为扩大收敛域需引入 Padé 近似,并且,通常需要对各节点依次计算,进一步影响计算效率;在气网能流求解中,现有方法常以 NR 法计算结果作为 HELM 的初值,若选取初值不当,将导致计算时间增加,甚至无法收敛。

针对上述问题,本文提出一种基于预处理 BICGSTAB 重启全纯嵌入的电-气 IES 能流计算方法。该方法首先对幂级数系数方程组的系数矩阵进行预处理,并采用 BICGSTAB 迭代求解,从而改善系数矩阵的特征值分布,提高求解收敛性;随后,在电网侧能流求解中,利用 CHELM 的常项值动态更新机制,提出 Padé 近似与多项式全乘法相结合的电压有理逼近策略,先通过 Padé 近似扩大收敛域,更新后采用 TMP 方法加速计算;进一步,在气网侧能流求解中,引入重启全纯嵌入计算方法,以提升收敛性并提高计算效率;最后,通过 E39-G20 和 E2383-G60 测试系统算例对所提方法进行分析、验证。

1 综合能源系统能流模型构建及求解

本文研究对象为电-气 IES,根据全纯嵌入原理对其进行模型构建,全纯嵌入原理详见文献[34-35]。

1.1 电力子系统潮流模型构建

电力系统的全纯嵌入潮流模型如下^[20]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^N Y_{ik, tr}^{\text{sym}} V_k(s) = \frac{s S_i^*}{V_i^*(s^*)} - s Y_{i, sh} V_i(s) - \\ \quad s \sum_{k=1}^N Y_{ik, tr}^{\text{unsym}} V_k(s) + (1-s) I_i^{(0)} \\ \sum_{k=1}^N Y_{lk, tr}^{\text{sym}} V_k(s) = \frac{s P_l - j Q_l(s)}{V_l^*(s^*)} - s Y_{l, sh} V_l(s) - \\ \quad s \sum_{k=1}^N Y_{lk, tr}^{\text{unsym}} V_k(s) + (1-s) I_l^{(0)} \\ V_l(s) V_l^*(s^*) = |V_l^{(0)}|^2 + \alpha (V_{lm}^2 - |V_l^{(0)}|^2) \\ V_r(s) = 1 + s(V_r^{\text{sp}} - 1) \end{array} \right. \quad (1)$$

式中: $Y_{ik, tr}^{\text{sym}}$ 、 $Y_{ik, tr}^{\text{unsym}}$ 分别为不计对地导纳的节点导纳矩阵对称部分和不对称部分的元素; s 为复嵌入变量; $V_k(s)$ 为嵌入后的节点 k 电压; “*” 为共轭运算符; S_i^* 为节点 i 的复功率; $Y_{i, sh}$ 和 $Y_{l, sh}$ 分别为 PQ 节点和 PV 节点的对地自导纳; i 为 PQ 节点编号; l 为 PV 节点编号; r 为平衡节点编号; $I_i^{(0)}$ 和 $I_l^{(0)}$ 为节点 i 和节点 l 的电流常项值; P_l 为节点 l 的有功功率; $V_i(s)$ 、 $V_l(s)$ 和 $V_r(s)$ 分别为 PQ 节点、PV 节点和平衡节点的电压全纯函数; $Q_l(s)$ 为节点 l 的无功全纯函数; V_{lm} 为 PV 节点 l 的电压幅值; V_r^{sp} 为平衡节点 r 的电压; $V_l^{(0)}$ 为 PV 节点 l 的电压常项值。

1.2 天然气子系统能流模型构建

天然气系统全纯嵌入能流模型^[36]如下:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{gr} f(s) = A_{gr} f[0] + s(L_{gr} - S_{gr} - A_{gr} f[0]) \\ f(s) |f(s)| + C^2 (A_{gc})^T \pi(s) = v_1 + s(0 - v_1) \\ \pi_{sl}(s) = \pi_{sl}[0] + s(\pi_{sl} - \pi_{sl}[0]) \end{array} \right. \quad (2)$$

式中: A_{gr} 是非平衡节点-管道关联矩阵; $f(s)$ 为管道流量的全纯函数; $f[0]$ 为管道流量幂级数的零阶项系数,即管道流量初值; L_{gr} 是由除平衡节点外各节点气负荷组成的向量; S_{gr} 是由除平衡节点外各节点供气量组成的向量; C 是与气体性质以及管道之间的物理性质相关的系数; $\pi(s)$ 为节点气压平方的全纯函数; A_{gc} 是通过将节点-管道关联矩阵中对应压缩机管道入口的元素乘以 $-R_c^2$ 倍而形成, R_c 代表压缩比; v_1 表示式(2)在初始状态 $s=0$ 时左侧的值; $\pi_{sl}(s)$ 为平衡节点气压平方的全纯函数; $\pi_{sl}[0]$ 为平衡节点幂级数的零阶项系数,即平衡节点气压平方初值; π_{sl} 为由平衡节点气压值的平方组成的向量。

1.3 耦合元件模型构建

耦合元件包括燃气轮机和电压压缩机。燃气轮机输入天然气流量 F_{gas} 与输出电功率 P_{gas} 之间关系为^[37]:

$$F_{\text{gas}} = \alpha + \beta P_{\text{gas}} + \gamma P_{\text{gas}}^2 \quad (3)$$

式中: α 、 β 、 γ 为燃气轮机的耗热系数。

电压压缩机模型^[38]为:

$$P_{\text{com}} = (0.7479 \times 10^{-5}) B F_{m,n} \left[\left(\frac{\Pi_m}{\Pi_n} \right)^Z - 1 \right] \quad (4)$$

式中: P_{com} 为压缩机所需的有功功率; $F_{m,n}$ 为通过节点 m, n 之间压缩机的天然气流量; B 和 Z 为压缩机参数; Π_m 、 Π_n 分别为节点 m 和节点 n 的气压。

1.4 综合能源系统能流模型求解

本文采用分解求解法进行 IES 能流求解,待求量包括节点电压 v 、节点气压平方 π 及管道流量 f 。IES 全纯嵌入能流模型的求解主要包括两个环节:待求变量高阶幂级数系数的递推求解;待求变量幂级数的有理逼近值计算。

电网侧零阶项系数参考文献[20]进行设置。为获得各节点待求变量的各阶幂级数系数,依据多项式等式两边同阶幂级数系数相等的原则,推导出高阶项与低阶项间的关系,得到附录 A 式(A1)所示的递归关系式,进一步,可将该递归关系式表示为形如 $AX=B$ 的矩阵形式。气网侧零阶项系数参考文献[39],其幂级数系数的递推表达式如式(5)所示。

在获取待求变量各阶幂级数系数后,对各阶系数累加即可得到待求变量的解。然而,求解大规模

IES能流时往往需要较高的幂级数阶数,导致计算效率降低,甚至无法收敛。为此,HELM采用可扩大幂级数收敛域的Padé近似算法计算电压的幂级数有理逼近值,以提高求解潮流的收敛性,但Padé近似算法包含较多复杂的矩阵运算,求解成本较大导致效率较低。

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} A_{gr} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f[n] \\ \pi_{sl}[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \end{bmatrix} \\ 2f[0] \quad C^2(A_{gc})^T \begin{bmatrix} \pi_{re}[n] \end{bmatrix} \\ D = [1 \ 0 \ 0 \cdots 0 \ 0 \ 0] \\ \Pi_1 = \delta_{n1}(L_{gr} - S_{gr} - A_{gr}f[0]) \\ \Pi_2 = \delta_{n1}(\pi_{sl} - \pi_{sl}[0]) \\ \Pi_3 = \delta_{n1}(0 - v_1) - \sum_{k=1}^{n-1} f[k]f[n-k] \end{cases} \quad (5)$$

式中: $f[n]$ 为管道流量幂级数的第 n 阶项系数; $\pi_{sl}[n]$ 为平衡节点气压平方幂级数的第 n 阶项系数; $\pi_{re}[n]$ 为除平衡节点外剩余节点气压平方幂级数的第 n 阶项系数; δ_{n1} 为引入变量,当 $n=1$ 时, $\delta_{n1}=1$, n 取其他值时, $\delta_{n1}=0$ 。

2 预处理 BICGSTAB 重启全纯嵌入能流计算方法

2.1 电网侧潮流求解

电网侧潮流求解采用基于常项值的全纯嵌入潮流计算方法,本文从幂级数系数方程组求解与Padé近似计算两个环节改进该方法,以提升计算效率。

2.1.1 幂级数系数线性方程组系数矩阵预处理

以包括1个平衡节点、 a 个PV节点、 b 个PQ节点的 N 节点系统为例,推导幂级数系数的矩阵求解形式:

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ H & W[0] \\ V[0] & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V[n] \\ Q[n] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{slack}[n-1] \\ R_{PV,PQ}[n-1] \\ R_{PV}[n-1] \end{pmatrix} \quad (6)$$

式中: A 为由元素0和1组成的矩阵; H 为矩阵变换前由电导和电纳组成的矩阵; $W[0]$ 为由PV节点电压逆实部与虚部幂级数零阶项系数组成的矩阵; $V[0]$ 为由节点电压实部与虚部幂级数零阶项系数组成的矩阵; $V[n]$ 为由待求第 n 阶节点电压实部与虚部幂级数系数组成的列向量; $Q[n]$ 为由待求第 n 阶节点无功幂级数系数组成的列向量; $R_{slack}[n-1]$ 、 $R_{PV,PQ}[n-1]$ 和 $R_{PV}[n-1]$ 分别为平衡节点、PV、PQ节点递推关系及PV节点幅值约束方程对应的右端项列向量。

式(6)中各子矩阵的表达式见附录A式(A2)—(A7)。式(6)可简记为:

$$Y_{sys} X[n] = R[n-1] \quad (7)$$

式中: Y_{sys} 为幂级数系数线性方程组系数矩阵; $X[n]$ 为电压和无功第 n 阶幂级数系数向量, n 为节点电压及无功功率全纯函数的展开阶数; $R[n-1]$ 为含有第 $n-1$ 阶电压幂级数系数的递归计算表达式,即式(6)的右侧矩阵。

如前文所述,采用直接法求解式(7)所示的高维幂级数方程组时,计算复杂度较高,计算耗时较长。为此,本文结合系数矩阵 Y_{sys} 的稀疏性及非对称性,采用BICGSTAB法求解幂级数系数方程组式(7),BICGSTAB法的特点和计算流程详见文献[40]。此外,系数矩阵 Y_{sys} 特征值分布较为分散,BICGSTAB法求解时收敛性较差,求解效率较低。为此,本节提出一种预处理器作用于系数矩阵,改善其特征值分布,提升收敛性,提高求解效率。

一般来说,评价系数矩阵预处理器方法性能优劣的关键标准主要包含以下两点:1)预处理器的构造时间以及迭代法求解预处理后线性方程组的总时间,应不超过未对系数矩阵预处理时直接用迭代法求解原线性组的时间;2)预处理之后的系数矩阵需有更为集中的特征值分布情况,以此来提升迭代法的收敛性。从式(6)及附录A式(A2)—(A7)中可看出系数矩阵阶数过高,且电导电纳分布无规律,为此本文对其进行降阶及行列变换处理,以改善其特征值分布,以下是矩阵变换过程。

首先对式(7)进行降阶处理,从附录A式(A2)—(A7)可得式(7)平衡节点电压的虚部始终为0,在 $n=1$ 时,平衡节点电压实部为 $V_1^{sp}-1$ (V_1^{sp} 为设定平衡节点电压值),可移至方程组右侧进行降阶;当 $n>1$ 时,平衡节点电压实部也为0,此时无需考虑平衡节点及其在系数矩阵中对应的元素,降阶后的方程组见式(8)。为进一步对方程组进行降阶,提取 $V[0]$ 所在行对应的方程,如式(9)所示,并推导出PV节点实部第 n 阶幂级数系数的表达式,如式(10)所示。将PV节点的实部移到方程组右侧后,方程组形式如式(11)所示。式(8)和式(11)中各子矩阵表达式见附录A式(A9)及(A11)。

$$\begin{pmatrix} H_1 & W[0] \\ V[0] & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1[n] \\ Q[n] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{PV,PQ}[n-1] \\ R_{PV}[n-1] \end{pmatrix} \quad (8)$$

式中: H_1 为第1次降阶后由电导和电纳组成的矩阵; $V_1[n]$ 为第1次降阶后由待求第 n 阶节点电压实部与虚部幂级数系数组成的列向量。

$$\begin{cases} V_l[0]V_l^*[1] + V_l[1]V_l^*[0] = V_{lm}^2 - |V_l^{(0)}|^2, n=1 \\ V_{l, re}[0]V_{l, re}[n] + V_{l, im}[0]V_{l, im}[n] = \\ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} V_l[k]V_l^*[n-k], n>1 \end{cases} \quad (9)$$

式中: $V_l[0]$ 为 PV 节点电压幂级数零阶项系数; $V_{l, \text{re}}[0]$ 为 PV 节点电压实部幂级数零阶项系数; $V_{l, \text{im}}[0]$ 为 PV 节点电压虚部幂级数零阶项系数。

$$V_{l, \text{re}}[n] = \delta_{n1} \frac{V_{lm}^2 - |V_l^{(0)}|^2}{2V_{l, \text{re}}[0]} - \frac{(\sum_{k=1}^{n-1} V_l[k] V_l^*[n-k])}{2V_{l, \text{re}}[0]} - \frac{V_{l, \text{im}}[0] V_{l, \text{im}}[n]}{V_{l, \text{re}}[0]} \quad (10)$$

$$(H_2 \quad W[0]) \begin{pmatrix} V_2[n] \\ Q[n] \end{pmatrix} = R_{\text{PV}, \text{PQ}}[n-1] - H_{\text{PV}} V_{l, \text{re}}[n] \quad (11)$$

式中: H_2 为第 2 次降阶后由电导和电纳组成的矩阵; $V_2[n]$ 为第 2 次降阶后由待求第 n 阶节点电压实部与虚部幂级数系数组成的列向量; H_{PV} 为 PV 节点的实部移到方程组右侧由电导和电纳组成的矩阵。

为进一步改善系数矩阵的特征值分布, 对式 (11) 的系数矩阵进行列变换, 将 H_2 中与待求变量 $V_2[n]$ 中 PQ 节点虚部 $V_{\text{PQ}, \text{re}}[n]$ 相乘的列移至系数矩阵最右侧。相应的, 将 $V_2[n]$ 中的 $V_{\text{PQ}, \text{re}}[n]$ 移至待求变量向量的最下侧, 随后对系数矩阵做行变换, 并同步调整方程组右侧向量 $R_{\text{PV}, \text{PQ}}[n-1]$ 的元素顺序。此时方程组形式为:

$$\begin{pmatrix} -B & W_{\text{im}}[0] & G_{\text{PQ}} \\ G & W_{\text{re}}[0] & B_{\text{PQ}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{\text{im}}[n] \\ Q[n] \\ V_{\text{PQ}, \text{re}}[n] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{(\text{PV}, \text{PQ}), \text{re}}[n-1] \\ R_{(\text{PV}, \text{PQ}), \text{im}}[n-1] \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G_{\text{PV}} \\ B_{\text{PV}} \end{pmatrix} (V_{\text{PV}, \text{re}}[n]) \quad (12)$$

式中: B 为行列变换后由电纳组成的矩阵; G 为行列变换后由电导组成的矩阵; $W_{\text{im}}[0]$ 为 PV 节点电压逆虚部幂级数零阶项系数组成的矩阵; $W_{\text{re}}[0]$ 为 PV 节点电压逆实部幂级数零阶项系数组成的矩阵; G_{PQ} 为由除平衡节点外其他节点与 PQ 节点相连之间的电导值组成的矩阵; B_{PQ} 为由除平衡节点外其他节点与 PQ 节点相连之间的电纳值组成的矩阵; $V_{\text{im}}[n]$ 为待求第 n 阶节点电压虚部幂级数系数组成的列向量; $V_{\text{PQ}, \text{re}}[n]$ 为待求第 n 阶 PQ 节点电压实部幂级数系数组成的列向量; $R_{(\text{PV}, \text{PQ}), \text{re}}[n-1]$ 为 PV、PQ 节点递推关系对应的右端项实部列向量; $R_{(\text{PV}, \text{PQ}), \text{im}}[n-1]$ 为 PV、PQ 节点递推关系对应的右端项虚部列向量; G_{PV} 为由除平衡节点外其他节点与 PV 节点相连之间的电导值组成的矩阵; B_{PV} 为由除平衡节点外其他节点与 PV 节点相连之间的电纳值组成的矩阵; $V_{\text{PV}, \text{re}}[n]$ 为行列变换后 PV 节点幅值约束方程对应所得到的右端项列向量。

式 (12) 中各子矩阵表达式见附录 A 式 (A14) —

(A26)。然后, 将式 (12) 右端中含有 PV 节点未知量的虚部移至等式左侧, 调整完毕的方程组形式为:

$$\begin{pmatrix} -B_1 & W_{\text{im}}[0] & G_{\text{PQ}} \\ G_1 & W_{\text{re}}[0] & B_{\text{PQ}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{\text{im}}[n] \\ Q[n] \\ V_{\text{PQ}, \text{re}}[n] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{(\text{PV}, \text{PQ}), \text{re}}[n-1] \\ R_{(\text{PV}, \text{PQ}), \text{im}}[n-1] \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G_{\text{PV}} \\ B_{\text{PV}} \end{pmatrix} (V_{\text{PV}, \text{re}}[n]) \quad (13)$$

式中: B_1 为将 PV 节点未知量的虚部移至等式左侧后由电纳组成的矩阵; G_1 为将 PV 节点未知量的虚部移至等式左侧后由电导组成的矩阵; $V_{\text{PV}, \text{re}}[n]$ 为将 PV 节点未知量的虚部移至等式左侧后 PV 节点幅值约束方程对应所得到的右端项列向量。

式 (13) 中各子矩阵表达式见附录 A 式 (A27) — (A29)。此时, 求解幂级数系数的方程组式 (7) 转换为求解式 (13), 可看出式 (13) 的系数矩阵形式上接近于分块矩阵, 式 (13) 可进一步简记为:

$$Y_{\text{sys_final}} X_{\text{final}}[n] = R_{\text{final}}[n-1] \quad (14)$$

式中: $X_{\text{final}}[n]$ 为经历矩阵变换后所有待求变量第 n 阶幂级数系数组成的列向量; $R_{\text{final}}[n-1]$ 为经历矩阵变换后的右端项列向量。

然后对 $Y_{\text{sys_final}}$ 进行预处理以改善其特征值分布。从式 (13) 中可看出系数矩阵非零元素较多, 导致所需存储空间较大, 影响计算效率, 为此本文对其中元素做适当简化。由于系数矩阵中电导 G 相对于电纳 B 较小, 为进一步降低预处理器求逆的计算成本, 将系数矩阵中的电导 G 置为 0, 并将 PV 节点电压虚部也置为 0。相应的, 附录式 (A27) 和式 (A28) 中的 $V_{l, \text{im}}[0]/V_{l, \text{re}}[0]$ 也为 0, 构建式 (15) 所示的预处理器 $Y_{\text{sys_pre}}$, 最终得到预处理后的幂级数系数方程组, 如式 (16) 所示。

$$Y_{\text{sys_pre}} = \begin{pmatrix} -B & W_{\text{im}}[0] & 0 \\ 0 & W_{\text{re}}[0] & B_{\text{PQ}} \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$Y_{\text{sys_pre}}^{-1} Y_{\text{sys_final}} X_{\text{final}}[n] = Y_{\text{sys_pre}}^{-1} R_{\text{final}}[n-1] \quad (16)$$

相较于直接求解式 (7), 预处理改善了系数矩阵的特征值分布, 采用 BICGSTAB 法求解式 (16) 可提升 BICGSTAB 的收敛效果, 提高求解效率。

2.1.2 电压有理逼近值的计算

如前文所述, 在获取各节点电压幂级数系数后, 需要通过 Padé 近似依次计算各节点电压有理逼近值, 从而得到潮流计算结果。然而, 各节点 Padé 近似计算量较大, 且需要依次对各节点进行计算, 计算效率较低, 而 TMP 方法的计算收敛性较差。为此, 本节以常项值动态更新为基础, 将 Padé 近似与 TMP 相结合, 在常项值首次更新前采用 Padé 近似方法计算电

压有理逼近值,以扩大收敛域;在首次常项值更新后,采用TMP方法计算电压解,从而显著减少计算量与计算时间。

TMP方法给出了一种电压逆幂级数系数高阶项的计算方法。电压逆幂级数系数递归关系式如式(17)所示^[31]。

$$\begin{cases} W_l[n] = -\frac{\sum_{m=0}^{n-1} W_l[n] V_l[n-m]}{V_l[0]}, \forall n > 0 \\ W_i[n] = -\frac{1 - (\sum_{m=0}^{n-1} W_i[m]) \cdot (\sum_{m=0}^n V_i[m])}{\sum_{m=0}^n V_i[m]}, \forall n > 0 \end{cases} \quad (17)$$

式中: $W_l[n]$ 为第 n 阶 PV 节点电压逆幂级数系数; $W_i[n]$ 为第 n 阶 PQ 节点电压逆幂级数系数; $V_l[n-m]$ 为第 $n-m$ 阶 PV 节点电压幂级数系数; $V_i[m]$ 为第 m 阶 PQ 节点电压幂级数系数。

然而, TMP 方法在求解大规模或者结构复杂的系统时计算收敛性差。为此, 本节提出一种利用 CHELM^[20] 常项值动态更新机制将 Padé 近似与 TMP 算法相结合的方法。具体而言, 利用 CHELM 的常项值动态更新提高收敛性: 首次更新前采用 Padé 近似计算电压逼近值以扩大收敛域; 首次更新后利用 TMP 算法计算电压解, 从而提高潮流计算速度。

在首次常项值更新前, 电压逆幂级数系数递归关系式如式(18)所示:

$$W_k[n] = -\frac{\sum_{m=0}^{n-1} W_k[n] V_k[n-m]}{V_k[0]}, \forall n > 0, k \in I \quad (18)$$

式中: I 为电力系统中 PQ 和 PV 节点集合。

综上, 所提电网侧潮流计算方法流程如图 1 所示, 具体步骤如下:

步骤 1: 输入系统数据, 设置潮流计算精度 ε 、电网侧最大更新次数 $T_{\max}$ 、阶数上限 $n_{\max}$, 并给定电压常项值 $V^{(0)}$ 、电流常项值 $I^{(0)}$ 。

步骤 2: 常项值更新次数 $T=0$ 时, 根据式(18)的电压逆幂级数系数表达式及式(16)的递归方程求解前 $n_{\max}$ 阶幂级数系数, 进而利用 Padé 近似求解电压逼近值, 并进入步骤 4。

步骤 3: 判断幂级数阶数 n 是否小于 $n_{\max}$, 若满足, 则根据式(16)和式(17)求解幂级数系数, 进而将各阶幂级数系数求和计算所有节点电压值; 若不满足, 则对 $V^{(0)}$ 和 $I^{(0)}$ 进行更新, 并令 $T=T+1, n=1$, 继而判断 T 是否小于 $T_{\max}$, 若满足, 则重复步骤 3; 若不满足, 则输

出“超过最大更新次数”, 并结束计算。

步骤 4: 计算最大功率不平衡量, 记为 m_{mis} , 并判断其是否满足精度要求, 若不满足, 则返回步骤 3, 若满足, 则进入步骤 5。

步骤 5: 输出电压幅值、相角计算结果, 结束计算。

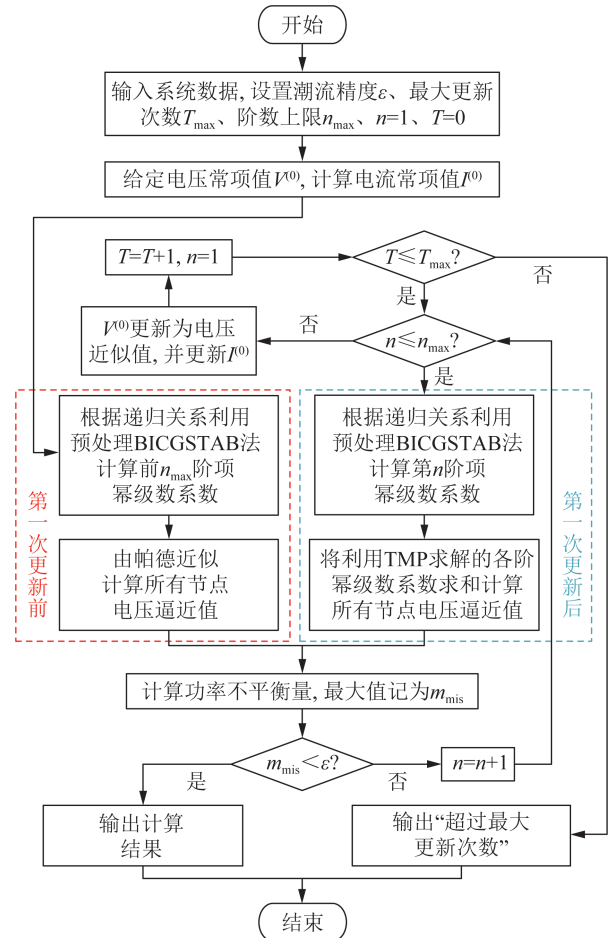


图 1 电网侧潮流求解流程图

Fig. 1 Flow chart for solving power flow on the grid side

2.2 气网侧能流求解

现有 HELM 求解气网侧能流时, 通常选取 NR 法迭代 3 次的结果作为初值。然而, HELM 收敛性和计算效率仍受 NR 法结果影响。若初值离真解较远, 计算效率将显著降低, 甚至可能无法收敛。为此, 本节结合重启动机制^[41], 提出一种重启全纯嵌入算法计算气网侧能流。该方法不依赖 NR 法计算结果, 初值仅参考文献[39]: 以气源平衡节点的气压为基准气压, 按连接顺序将此后各节点气力依次降低 2%, 作为气网侧的初值。采用重启全纯嵌入法计算气网侧能流时, 首先设定幂级数计算阶数的上限 $n_{\max}$ 以及重启次数上限 $R_{\max}$ 。根据式(5)所示的幂级数系数递归表达式, 递归计算各阶幂级数系数, 当幂级数阶数达到上限 $n_{\max}$ 时, 以当前 Padé 近似得到的气压及管道流量

逼近值作为重启后的初值,并更新式(5)中与初值有关的项 $f[0]$ 。重复上述过程,直至计算精度达到要求,得到系统气压及管道流量解,若重启次数达到上限 $R_{\max}$ 仍未收敛,则终止计算并判定系统无法收敛。计算流程如图2所示。

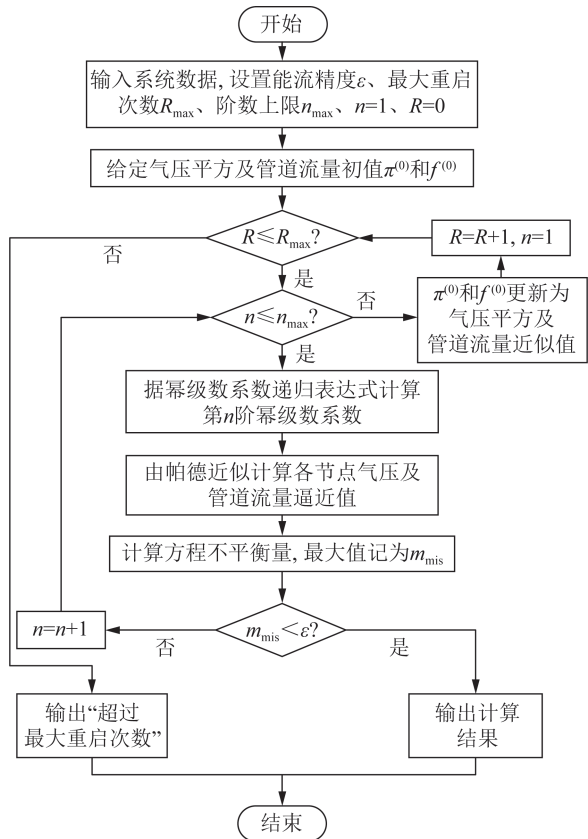


图2 气网侧潮流求解流程

Fig. 2 Flow chart for solving energy flow on the gas network side

2.3 电-气综合能源系统能流求解

本文考虑电压压缩机和燃气轮机为电-气 IES 的耦合元件,能流计算求解示意图如图3所示。

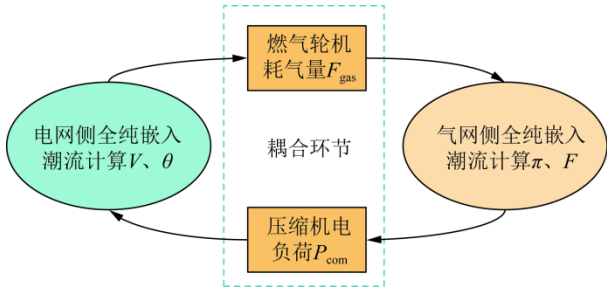


图3 电-气综合能源系统能流求解示意图

Fig. 3 Schematic diagram for solving energy flow in electric gas integrated energy system

本文所提电-气 IES 能流求解具体步骤如下,具体计算流程如图4所示。

步骤1:输入系统数据,设置能流计算精度 ε 、电

网侧最大更新次数 $T_{\max}$ 、气网侧最大重启次数 $R_{\max}$ 、阶数上限 $n_{\max}$ 。

步骤2:给定气压平方及管道流量初值 $\pi^{(0)}$ 和 $F^{(0)}$,电压常项值 $V^{(0)}$ 和电流常项值 $I^{(0)}$ 。

步骤3:计算电网潮流,得电压结果,根据潮流得出电网出力需求,计算燃气轮机耗气量。

步骤4:根据步骤3计算出的燃气轮机耗气量,更新气网侧负荷进行能流计算,得到气压及管道流量结果。

步骤5:判断前后两次流过电压压缩机所在管道的管道流量的差值是否满足精度要求,即判断 $|F_{\text{com}(n)} - F_{\text{com}(n-1)}|$ 是否小于 ε ,若不满足,则计算压缩机电负荷,并更新电网负荷,并将步骤3和步骤4中记录的电压、气压及管道流量结果当作新的初值,返回步骤2;若满足,则进入步骤6。

步骤6:输出电压幅值、相角、气压及管道流量计算结果。

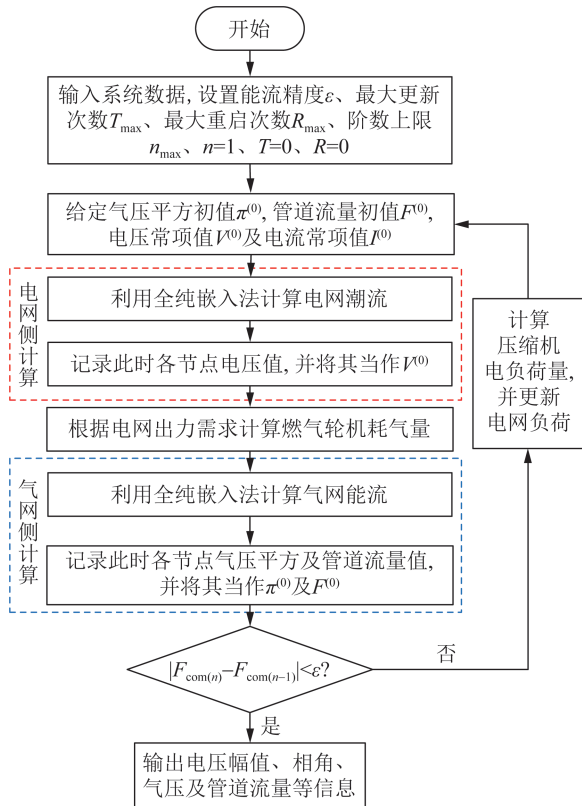


图4 电-气综合能源系统能流求解流程图

Fig. 4 Flow chart for solving energy flow in electric gas integrated energy

3 算例分析

3.1 算例设置

本节以 IEEE-39 节点电力系统与比利时 20 节点天然气系统组成的 E39-G20 综合能源测试系统、波兰

2383节点电力系统与3个比利时20节点天然气系统组成的E2383-G60综合能源测试系统,以及不同节点规模的电力系统为例,验证所提方法的准确性和高效性。计算精度设置为 10^{-4} 。硬件配置为Intel Core i7-13650HX处理器、24 GB内存的计算机,软件平台为Matlab2022b。

E39-G20及E2383-G60测试系统结构如图5和

图6所示。IEEE-39系统中节点30,32,34,35,37对应的机组为5台燃气轮机,其所需天然气分别由天然气系统的负荷节点13,6,20,7,12供给;在波兰2383节点电力系统中,共有18个节点分别与3个区域的比利时20节点天然气系统节点相连,具体连接关系如图6所示。天然气系统中压缩机为电压缩机,相关系统参数见文献[42]。

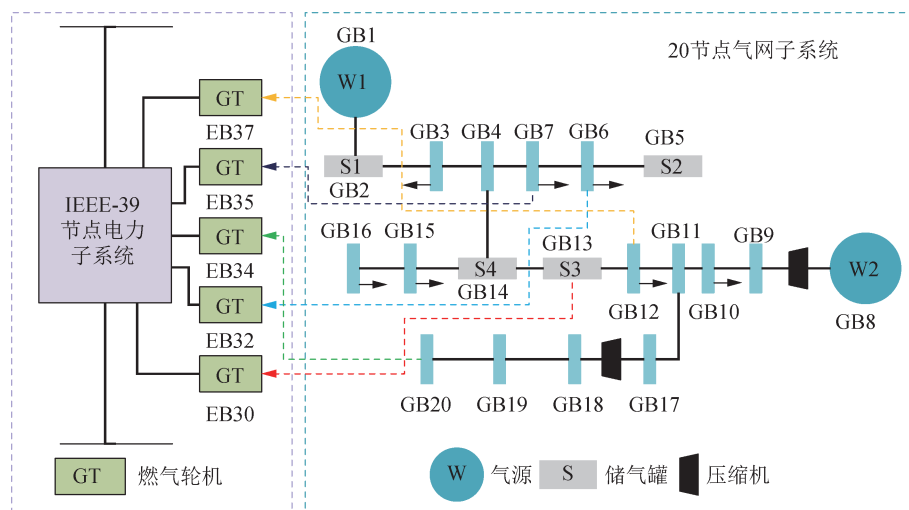


图5 E39-G20测试系统

Fig. 5 E39-G20 test system

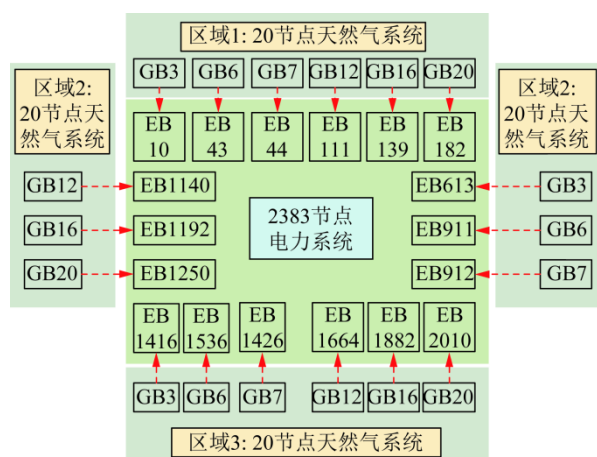


图6 E2383-G60测试系统

Fig. 6 E2383-G60 test system

3.2 准确性验证

3.2.1 E39-G20综合能源测试系统

本文采用分解求解法求解E39-G20系统能流,首先进行电网侧潮流求解:参考文献[14]设置零阶项系数,即给定首次常项值更新前的初值,并设置幂级数计算阶数上限 $n_{\max}=4$,然后采用本文所提的预处理BICGSTAB法求解式(16)所示的幂级数系数方程组;为降低计算成本,在获取前4阶各节点电压幂级数系数后,再利用Padé近似计算电压逼近值;最终,经过3次常项值更新并计算至3阶幂级数系数后,系统最大

不平衡量为 8.5754×10^{-5} p. u.,小于设定精度 10^{-4} ,表明电网侧潮流收敛,并记录此时的电压结果。

进一步,基于电网侧潮流计算结果得到燃气轮机耗气量,并对气网侧进行能流求解。根据文献[31]给定初值,采用BICGSTAB法求解气压及管道流量的幂级数系数,并利用Padé近似计算气压及管道流量的逼近值。最终,经历1次重启并计算至3阶幂级数系数后,系统的最大不平衡量为 2.1744×10^{-8} Mm^6/d^2 ,小于设定精度 10^{-4} ,表明气网侧能流收敛,并记录此时的气压及管道流量结果。

然后,根据气网侧能流计算结果计算压缩机负荷,并将其更新至电网侧,再次进行分解求解流程。此时电网侧的初值取上一次计算记录的电压结果,最终无需进行常项值更新,计算至4阶幂级数系数后,系统最大不平衡量为 1.0424×10^{-5} p. u.,小于所设计算精度 10^{-4} ,表明电网侧潮流收敛,并记录此时的电压结果,气网侧重复上述步骤,最终经历1次重启并计算至3阶幂级数系数后,系统最大不平衡量为 1.5987×10^{-12} Mm^6/d^2 ,小于所设计算精度 10^{-4} ,代表气网侧能流收敛,并记录此时的气压及管道流量结果。

经历2次分解求解后,前后两次流过电压压缩机所在管道的流量差为 1.1630×10^{-8} Mm^3/d ,表明E39-G20综合能源测试系统能流收敛。具体收敛阶数如表1所示。

表 1 E39-G20 系统能流计算收敛阶数
Table 1 The convergence order of the E39-G20 system's power flow calculation

分解求解次数	更新/重启次数		计算阶数	
	电网侧	气网侧	电网侧	气网侧
1	3	1	3	3
2	0	1	4	3

为验证本文所提方法的准确性,本节分别应用 NR 法与所提方法进行能流计算,电网侧结果如表 2 所示,气网侧对比两种方法计算绝对误差最大的 8 个节点的气压及管道流量的结果,如图 7 所示。以 NR 法结果为基准,采用本文所提方法计算 IES 能流时,最大绝对误差和相对误差如表 3 所示。

由表 2 和图 7 计算结果可知:本文所提方法与 NR 法的计算结果基本一致。由表 3 可知,电压相角最大绝对误差和最大相对误差仅为 $3.011\ 5\times 10^{-5}^{\circ}$ 和 $0.051\ 3\%$,平均相对误差不超过 $6.496\ 6\times 10^{-4}\%$,表明所提方法与 NR 法具有相同的计算精度,可实现 IES 能流的精确求解。

3.2.2 E2383-G60 综合能源测试系统

本节进一步以图 6 所示 E2383-G60 综合能源测试系统为例,验证本文所提方法在大型 IES 中的计算准确性。

该系统的具体收敛阶数如表 4 所示。为便于展示,电网侧选取两种方法相对误差最大的前 15 个节点进行对比,结果如表 5 和图 8 所示。

由表 5 和图 8 可知,在大规模系统中所提方法的计算结果与 NR 法结果基本一致。由表 6 误差统计结果可知,电压相角最大绝对误差和最大相对误差仅为 $1.420\ 8\times 10^{-5}^{\circ}$ 和 $0.020\ 4\%$,平均相对误差不超过 $5.409\ 4\times 10^{-5}\%$ 。上述结果表明所提方法可准确求解大规模 IES 能流,具有较高的计算精度。

3.3 鲁棒性验证

3.3.1 重负荷工况

为验证本文所提方法在重负荷工况下的鲁棒性,表 7 以 NR 法计算 E39-G20 系统的能流结果为基准,给出了 1.2 倍负荷水平下所提方法计算得到的误差。

由表 7 可知,120% 负荷水平下,E39-G20 系统电压相角最大绝对误差和最大相对误差仅为 $8.808\ 0\times 10^{-4}^{\circ}$ 和 $2.398\ 1\times 10^{-3}\%$,平均相对误差均不超过 $1.762\ 5\times 10^{-3}\%$ 。这一结果表明,在重负荷水平下,本文所提方法仍能准确求解综合能源系统能流。

3.3.2 弱联络工况

为验证本文所提方法在弱联络工况下的鲁棒

性,本节对电网侧 39 节点电力系统进行修改,将 15-16、22-23 及 26-29 支路断开,成为弱环网络。表 8 以 NR 法计算修改后的 E39-G20 系统的能流结果为基准,给出了所提方法计算得到的误差。

由表 8 可知,弱联络工况下,E39-G20 系统电压相角最大绝对误差和最大相对误差仅为 $1.966\ 4\times 10^{-5}^{\circ}$ 和 $1.121\ 0\times 10^{-3}\%$,平均相对误差不超过 $1.148\ 5\times 10^{-4}\%$ 。上述结果表明,在弱联络工况下,本文所提方法仍具有较高的计算精度。

3.3.3 高阻抗比(R/X)工况

为验证本文所提方法在高 R/X 工况下的鲁棒性,将电网侧 39 节点电力系统 R/X 修改为 1.8,表 9 以 NR 法计算 E39-G20 系统的能流结果为基准,给出了所提方法计算得到的误差。

由表 9 可知,在高 R/X 的工况下,E39-G20 系统电压相角最大绝对误差和最大相对误差仅为 $7.111\ 9\times 10^{-5}^{\circ}$ 和 $8.060\ 5\times 10^{-3}\%$,平均相对误差不超过 $1.256\ 4\times 10^{-3}\%$ 。上述结果表明,在高 R/X 工况下,本文所提方法仍能精确求解综合能源系统能流。

3.3.4 PV-PQ 节点切换工况

本节进一步验证所提方法在 PV-PQ 节点切换工况下的鲁棒性。以 118 节点电力系统为例,采用本文所提电网侧全纯嵌入潮流计算方法得到 PV 节点无功越限情况,如表 10 所示。可看出,节点 19、32、34、92、103 及 105 共 6 个 PV 节点出现无功功率越限情况,与 NR 法计算结果一致。将上述无功越限的 PV 节点均转换为 PQ 节点,并采用所提电网侧潮流计算方法计算系统潮流。

表 11 为 PV-PQ 节点切换后,以 NR 法计算 118 节点电力系统潮流结果为基准,所提方法计算得到的误差。

由表 11 可知,在大量 PV-PQ 节点切换工况下,118 节点电力系统电压相角最大绝对误差和最大相对误差仅为 $7.962\ 7\times 10^{-4}^{\circ}$ 和 $0.360\ 9\%$,平均相对误差不超过 $0.036\ 7\%$ 。综上结果表明,在重负荷、弱联络、高 R/X 及 PV-PQ 节点切换工况下,本文所提方法具有较强的鲁棒性,能够准确求解综合能源系统能流。

3.4 系数矩阵预处理有效性验证

如前文所述,本文对电网侧潮流采用所构造的预处理器求解幂级数系数。为验证预处理器 $Y_{\text{sys_pre}}$ 的有效性,本节对比了不采用预处理与采用本文所提预处理 BICGSTAB 法时,在不同规模电力系统的全纯嵌入潮流计算中 BICGSTAB 法求解修正方程组的平均迭代次数,对比结果见表 12。

表 2 E39-G20 系统电网侧潮流计算结果
Table 2 Results of power flow calculation on the grid side of the E39-G20 system

节点 编号	节点电压幅值/p.u.		电压幅值相对 误差/%	节点电压相角/(°)		电压相角 相对误差/%
	NR	本文方法		NR	本文方法	
1	1.039 4	1.039 4	0	-13.537 5	-13.537 5	0
2	1.048 5	1.048 5	0	-9.786 2	-9.786 2	0
3	1.030 7	1.030 7	0	-12.277 3	-12.277 4	0.000 8
4	1.004 5	1.004 5	0	-12.627 5	-12.627 6	0.000 8
5	1.006 0	1.006 0	0	-11.193 0	-11.193 0	0
6	1.008 2	1.008 2	0	-10.409 0	-10.409 0	0
7	0.998 4	0.998 4	0	-12.756 3	-12.756 3	0
8	0.997 9	0.997 9	0	-13.336 5	-13.336 5	0
9	1.038 3	1.038 3	0	-14.179 2	-14.179 2	0
10	1.017 8	1.017 8	0	-8.171 6	-8.171 6	0
11	1.013 4	1.013 4	0	-8.937 7	-8.937 7	0
12	1.000 8	1.000 8	0	-8.999 6	-8.999 6	0
13	1.014 9	1.014 9	0	-8.930 7	-8.930 7	0
14	1.012 3	1.012 3	0	-10.716 1	-10.716 2	0.000 9
15	1.016 2	1.016 2	0	-11.346 5	-11.346 5	0
16	1.032 5	1.032 5	0	-10.034 6	-10.034 6	0
17	1.034 2	1.034 2	0	-11.117 6	-11.117 6	0
18	1.031 6	1.031 6	0	-11.987 2	-11.987 2	0
19	1.050 1	1.050 1	0	-5.411 7	-5.411 6	0.001 8
20	0.991 0	0.991 0	0	-6.823 1	-6.823 0	0.001 5
21	1.032 3	1.032 3	0	-7.630 0	-7.630 0	0
22	1.050 1	1.050 1	0	-3.184 4	-3.184 4	0
23	1.045 1	1.045 1	0	-3.382 5	-3.382 5	0
24	1.038 0	1.038 0	0	-9.915 0	-9.915 0	0
25	1.057 7	1.057 7	0	-8.370 2	-8.370 2	0
26	1.052 6	1.052 6	0	-9.439 8	-9.439 8	0
27	1.038 3	1.038 3	0	-11.363 2	-11.363 3	0.000 9
28	1.050 4	1.050 4	0	-5.929 4	-5.929 4	0
29	1.050 1	1.050 1	0	-3.170 9	-3.171 0	0.003 2
30	1.049 9	1.049 9	0	-7.371 4	-7.371 5	0.001 4
31	0.982 0	0.982 0	0	0	0	0
32	0.984 1	0.984 1	0	-0.189 2	-0.189 2	0
33	0.997 2	0.997 2	0	-0.194 8	-0.194 7	0.051 3
34	1.012 3	1.012 3	0	-1.633 0	-1.633 0	0
35	1.049 4	1.049 4	0	1.775 3	1.775 3	0
36	1.063 6	1.063 6	0	4.467 2	4.467 2	0
37	1.027 5	1.027 5	0	-1.583 9	-1.583 9	0
38	1.026 5	1.026 5	0	3.891 8	3.891 7	0.002 6
39	1.030 0	1.030 0	0	-14.536 1	-14.536 1	0

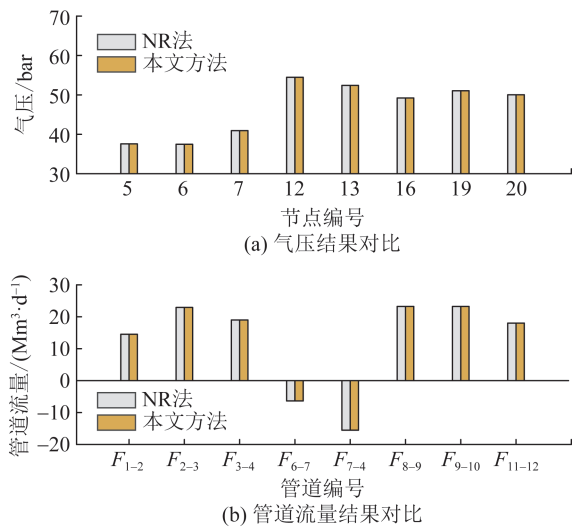


图7 E39-G20系统气网侧能流计算结果对比

Fig. 7 Comparison of energy flow calculation results on the gas side of the E39-G20 system

表3 E39-G20系统所提方法与NR法计算结果误差
Table 3 The error in the calculation results of NR method and the proposed method in the E39-G20 system

状态量	最大绝对误差	最大相对误差/%	平均相对误差/%
电压幅值	$8.804\ 8\times10^{-8}\text{p.u.}$	$8.382\ 5\times10^{-6}$	$1.938\ 4\times10^{-6}$
电压相角	$3.011\ 5\times10^{-5}^\circ$	$5.133\ 5\times10^{-2}$	$6.496\ 6\times10^{-4}$
气压	$1.734\ 6\times10^{-6}\text{bar}$	$4.325\ 3\times10^{-6}$	$1.048\ 7\times10^{-6}$
管道流量	$6.422\ 5\times10^{-7}\text{Mm}^3/\text{d}$	$7.786\ 4\times10^{-6}$	$2.650\ 3\times10^{-6}$

表4 E2383-G60系统能流计算收敛阶数
Table 4 The convergence order of the E2383-G60 system's power flow calculation

分解求解次数	更新/重启次数		计算阶数			
	电网侧	气网侧	电网侧	气网侧		
1	2	系统 1	1	2	系统 1	3
		系统 2	1		系统 2	3
		系统 3	1		系统 3	3
2	0	系统 1	0	4	系统 1	3
		系统 2	0		系统 2	3
		系统 3	0		系统 3	3

由表12可知,未采用预处理的BICGSTAB法在求解式(7)所示的方程组时无法收敛,难以改善计算效率。而采用本文所提预处理器后,求解幂级数系数方程组最多仅需迭代6次,即可得到幂级数系数结果,收敛效果明显改善,计算耗时显著降低。

为进一步验证所提预处理有效性,本节分析预处理对系数矩阵特征值的影响,以IEEE-39节点及2383节点电力系统的特征值分布进行分析,结果分别如图9和图10所示。由图9(a)可知,式(7)中系数

矩阵特征值分布较为分散,而对式(16)中系数矩阵进行预处理后,特征值在实部和虚部方向上更加密集,如图9(b)所示,有利于提高BICGSTAB方法的计算效率^[43]。由图10可知,预处理后系数矩阵的特征值分布相较于未经预处理时,在实部和虚部方向上均更为集中。综上,所提预处理能有效改善系数矩阵特征值分布,提高BICGSTAB方法计算效率。

3.5 计算效率对比

3.5.1 预处理求解幂级数系数方程组高效性验证

为验证本文所提预处理方法在求解幂级数系数方程组时的效率,本节对比了基于LU分解的直接求解法求解式(7)与采用预处理BICGSTAB法求解式(16)方程组的单次计算耗时,结果如表13所示。

由表13可知,相较于基于LU分解的直接法,本文所提预处理BICGSTAB法在求解幂级数系数方程组时具有显著加速效果。在大规模系统中,加速比可达149.8276。由此表明,本文所提预处理BICGSTAB法能够高效求解幂级数系数方程组。

3.5.2 电压逼近值计算高效性验证

为验证本文所提电压逼近值计算方法的高效性,本小节对比所提常项值动态更新下Padé近似与TMP结合的电压逼近值求解方法与仅用Padé近似法及仅用TMP方法计算各系统电压逼近值所消耗的时间,对比结果如表14所示。

由表14可知,本文所提出的在常项值动态更新之下Padé近似和TMP相结合的电压求解逼近值方法,随着规模的不断增大,相较于Padé近似方法加速优势愈发明显;在计算小规模系统潮流时,仅用TMP方法耗时最少,但随着系统规模增大与拓扑结构复杂,仅用TMP方法会出现不收敛,或者收敛速度慢导致耗时较长的问题。结果表明,本文所提常项值动态更新下Padé近似与TMP结合的电压逼近值求解方法能够高效求解电压逼近值。

3.5.3 电网侧全纯嵌入潮流计算的高效性验证

为验证本文所提电网侧全纯嵌入潮流计算方法的高效性,本节对比所提电网侧全纯嵌入潮流计算方法与传统HELM与NR法计算潮流的耗时,对比结果如表15所示。

由表15可知,本文所提电网侧全纯嵌入潮流计算方法在求解不同规模的电网潮流时均具有较低的计算耗时。其中,所提方法的潮流计算耗时相较于基于LU分解的平启动NR法,加速比最高达到503.8319;相较于传统HELM,所提方法加速比最高达到4.5695。这表明本文所提电网侧全纯嵌入潮流

表 5 E2383-G60 系统电网侧潮流计算结果

Table 5 Results of power flow calculation on the grid side of the E2383-G60 system

节点 编号	节点电压幅值/p.u.		相对 误差/%	节点 编号	节点电压相角 $\theta/(^{\circ})$		相对 误差/%
	NR	本文方法			NR	本文方法	
188	0.934 8	0.934 8	0	91	-0.371 9	-0.371 9	0
218	0.964 7	0.964 7	0	93	0.132 3	0.132 3	0
221	0.906 7	0.906 7	0	94	0.130 5	0.130 5	0
230	0.902 0	0.902 0	0	95	-0.034 8	-0.034 8	0
240	0.911 0	0.911 0	0	96	-0.040 1	-0.040 1	0
340	0.936 9	0.936 9	0	1051	0.245 5	0.245 5	0
401	0.911 4	0.911 4	0	1071	-0.489 1	-0.489 0	0.020 4
414	0.907 5	0.907 5	0	1140	0.383 3	0.383 3	0
434	0.914 7	0.914 7	0	1142	-0.477 3	-0.477 3	0
466	0.897 5	0.897 5	0	1186	0.151 9	0.151 9	0
1615	0.962 3	0.962 3	0	1188	0.172 7	0.172 7	0
1699	0.984 0	0.984 0	0	1386	0.053 9	0.053 9	0
1867	0.963 3	0.963 3	0	1396	0.383 3	0.383 3	0
1946	0.966 6	0.966 6	0	1426	0.350 5	0.350 5	0
2124	0.968 8	0.968 8	0	1513	-0.088 7	-0.088 7	0

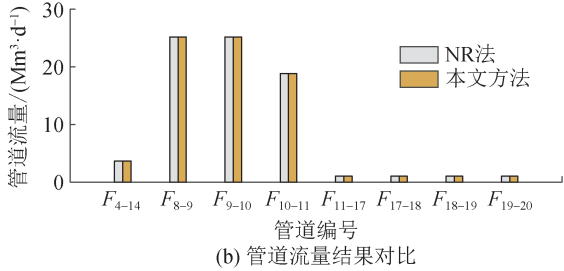
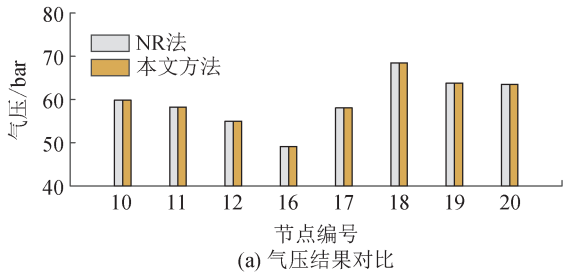


图 8 E2383-G60 系统气网侧能流计算结果对比

Fig. 8 Comparison of energy flow calculation results on the gas side of the E2383-G60 system

表 6 E2383-G60 系统 NR 法与所提方法计算结果误差

Table 6 The error in the calculation results of NR method and the proposed method in the E2383-G60 system

状态量	最大绝对误差	最大相对 误差/%	平均相对 误差/%
电压幅值	$8.003\ 0\times10^{-8}$ p.u.	$8.917\ 4\times10^{-6}$	$4.182\ 0\times10^{-7}$
电压相角	$1.420\ 8\times10^{-5}^{\circ}$	$2.044\ 6\times10^{-2}$	$5.409\ 4\times10^{-5}$
气压	$1.359\ 0\times10^{-5}$ bar	$2.140\ 2\times10^{-5}$	$8.702\ 3\times10^{-7}$
管道流量	$1.012\ 4\times10^{-7}$ Mm ³ /d	$9.874\ 5\times10^{-5}$	$6.394\ 1\times10^{-6}$

表 7 重负荷工况下 E39-G20 系统 NR 法与所提方法计算结果误差

Table 7 Error in NR method and proposed method calculation results of E39-G20 system under heavy load conditions

状态量	最大绝对误差	最大相对 误差/%	平均相对 误差/%
电压幅值	$3.019\ 3\times10^{-6}$ p.u.	$3.310\ 7\times10^{-4}$	$1.031\ 8\times10^{-4}$
电压相角	$8.808\ 0\times10^{-4}^{\circ}$	$2.398\ 1\times10^{-3}$	$1.762\ 5\times10^{-3}$
气压	$2.223\ 5\times10^{-4}$ bar	$6.283\ 6\times10^{-4}$	$1.104\ 4\times10^{-4}$
管道流量	$1.804\ 7\times10^{-5}$ Mm ³ /d	$2.242\ 7\times10^{-4}$	$7.424\ 9\times10^{-5}$

表 8 弱联络工况下 E39-G20 系统 NR 法与所提方法计算结果误差

Table 8 Error in NR method and proposed method calculation results of E39-G20 system under weak contact conditions

状态量	最大绝对误差	最大相对 误差/%	平均相对 误差/%
电压幅值	$4.444\ 6\times10^{-7}$ p.u.	$4.436\ 2\times10^{-5}$	$1.587\ 8\times10^{-5}$
电压相角	$1.966\ 4\times10^{-5}^{\circ}$	$1.121\ 0\times10^{-3}$	$1.148\ 5\times10^{-4}$
气压	$2.316\ 6\times10^{-6}$ bar	$6.179\ 3\times10^{-6}$	$1.405\ 8\times10^{-6}$
管道流量	$1.127\ 3\times10^{-6}$ Mm ³ /d	$1.117\ 1\times10^{-5}$	$3.627\ 4\times10^{-6}$

计算方法具有较高的计算效率,能够高效求解大规模电力系统潮流。

3.5.4 气网侧全纯嵌入能流计算的高效性验证

为验证本文所提气网侧全纯嵌入潮流计算方法的高效性,本节对比所提气网侧重启全纯嵌入潮流

表 9 高 R/X 工况 E39-G20 系统 NR 法与所提方法计算结果误差
Table 9 Error in NR method and proposed method calculation results for E39-G20 system under high R/X operating conditions

状态量	最大绝对误差	最大相对误差/%	平均相对误差/%
电压幅值	$1.811\ 1\times 10^{-7}$ p.u.	$1.772\ 4\times 10^{-5}$	$8.557\ 6\times 10^{-6}$
电压相角	$7.111\ 9\times 10^{-5}^{\circ}$	$8.060\ 5\times 10^{-3}$	$1.256\ 4\times 10^{-3}$
气压	$2.571\ 7\times 10^{-6}$ bar	$6.859\ 7\times 10^{-6}$	$1.309\ 1\times 10^{-6}$
管道流量	$1.126\ 2\times 10^{-6}$ Mm ³ /d	$8.991\ 5\times 10^{-6}$	$3.310\ 3\times 10^{-6}$

表 10 PV 节点无功功率越限情况
Table 10 PV node reactive power exceeding limit

节点编号	NR 法无功出力/Mvar	所提方法无功出力/Mvar	无功出力范围/Mvar
19	-14.27	-14.27	-8~24
32	-16.28	-16.28	-14~42
34	-20.83	-20.83	-8~24
92	-13.96	-13.96	-3~9
103	75.42	75.42	-15~40
105	-18.33	-18.33	-8~23

表 11 PV-PQ 节点切换工况下 118 节点电力系统 NR 法与所提方法计算结果误差

Table 11 Error between the NR method and the proposed method in the calculation results of the 118 node power system under PV-PQ node switching conditions

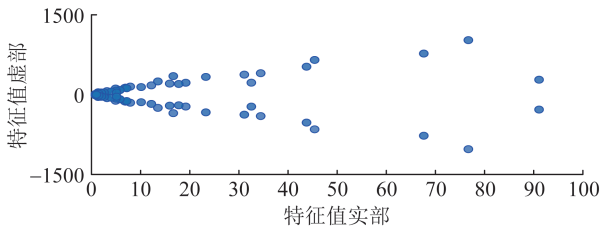
状态量	最大绝对误差	最大相对误差/%	平均相对误差/%
电压幅值	$9.240\ 3\times 10^{-7}$ p.u.	$9.344\ 4\times 10^{-5}$	$5.307\ 0\times 10^{-5}$
电压相角	$7.962\ 7\times 10^{-4}^{\circ}$	0.360 9	0.036 7

表 12 各系统预处理前后求解方程组平均迭代次数
Table 12 Average number of iterations for solving the system of equations before and after preprocessing for each system

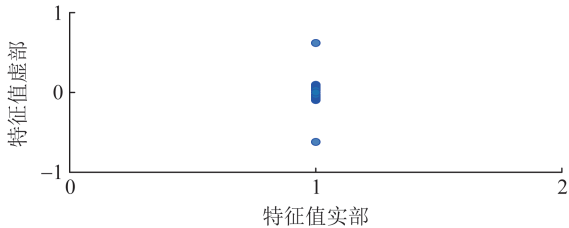
系统	平均迭代次数	
	无预处理	所提预处理
Case9	16	2
Case39	不收敛	3
Case300	不收敛	6
Case1354pegase	不收敛	3
Case2383	不收敛	4
Case3120sp	不收敛	4

计算方法与传统 HELM 与基于 LU 分解的 NR 法计算 E39-G20 及 E2383-G60 两个综合能源系统气网侧能流的耗时,对比结果如表 16 所示。

由表 16 可知,气网侧能流计算若采用传统

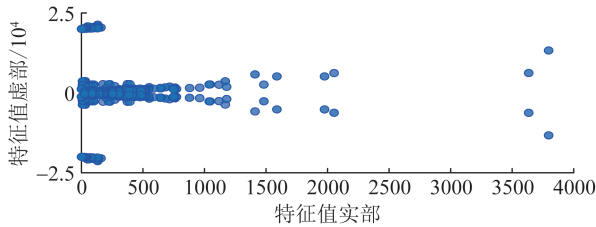


(a) 式(7)系数矩阵 Y_{sys} 无预处理时特征值分布

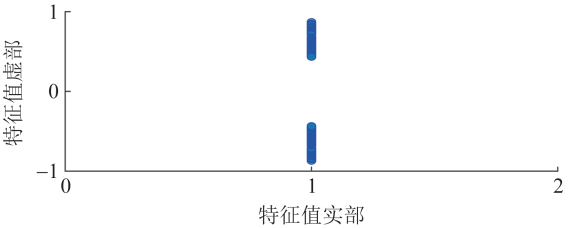


(b) 式(16)预处理后系数矩阵特征值分布

图 9 E39-G20 系统预处理前后系数矩阵特征值分布
Fig. 9 Eigenvalue distribution of coefficient matrix before and after preprocessing of E39-G20 system



(a) 式(7)系数矩阵 Y_{sys} 无预处理时特征值分布



(b) 式(16)预处理后系数矩阵特征值分布

图 10 E2383-G60 系统预处理前后系数矩阵特征值分布
Fig. 10 Eigenvalue distribution of coefficient matrix before and after preprocessing of E2383-G60 system

表 13 不同方法计算幂级数系数方程组时间对比
Table 13 Time comparison of different methods for calculating power series coefficient equations

系统	计算耗时/s		加速比
	基于 LU 分解求解	预处理 BICGSTAB	
Case9	0.000 097	0.000 558	0.163 1
Case39	0.000 363	0.001 337	0.271 5
Case300	0.021 810	0.016 321	1.336 3
Case1354pegase	1.223 611	0.031 693	38.608 2
Case2383	6.865 099	0.075 550	90.928 5
Case3120sp	17.585 864	0.117 347	149.827 6

HELM 计算将无法收敛,验证了本文所提气网侧重启全纯嵌入能流计算具有较好的收敛性,并且本文所

表 14 不同方法计算电压逼近值时间对比
Table 14 Comparison of different methods for calculating voltage approximation time

系统	计算耗时/s			加速比
	Padé近似	TMP	所提方法	
Case9	0.003 6	0.002 2	0.004 8	0.750 0/0.458 3
Case39	0.005 5	0.002 8	0.005 2	1.057 7/0.538 5
Case300	0.085 7	不收敛	0.013 2	6.492 4
Case1354pegase	0.188 9	0.084 6	0.016 9	11.177 5/5.005 9
Case2383wp	0.431 6	0.040 8	0.023 8	18.134 5/1.714 3
Case3120sp	0.332 0	0.051 4	0.033 5	9.910 4/1.534 3

注:“加速比”一栏中,“/”左右分别指所提方法计算时间相对于 Padé 近似法及仅用 TMP 方法计算时间的加速比。

表 15 不同方法计算潮流求解时间对比
Table 15 Comparison of different methods for calculating power flow solution time

系统	计算耗时/s			加速比
	平启动 NR 法(LU 分解)	传统 HELM	所提方法	
Case9	0.019 3	0.002 0	0.015 2	1.260 7/ 0.131 6
Case39	0.007 6	0.007 0	0.007 6	1.000 0/ 0.921 1
Case300	0.077 4	0.130 2	0.083 6	0.925 8/ 1.557 4
Case1354pegase	5.296 4	0.320 4	0.155 0	34.170 3/ 2.067 1
Case2383	25.216 4	0.746 2	0.163 3	154.417 6/ 4.569 5
Case3120sp	84.845 3	0.619 7	0.168 4	503.831 9/ 3.679 9

注:“加速比”一栏中,“/”左右分别指所提方法计算时间相对于基于 LU 分解直接法的平启动 NR 法和传统 HELM 计算时间的加速比。

表 16 不同方法计算气网侧能流求解时间对比
Table 16 Comparison of calculation time for gas network side energy flow using different methods

系统	计算耗时/s			加速比
	NR 法(LU 分解)	传统 HELM	所提方法	
E39-G20	0.014 2	不收敛	0.003 4	4.176 5
E2383-G60	26.740 5	不收敛	0.033 9	788.805 3

提气网侧重启全纯嵌入能流计算方法在不同规模的 IES 中求解时间均快于基于 LU 分解的 NR 法计算,在大规模系统中较为明显。

3.5.5 不同方法求解 IES 能流总耗时

本小节进一步对比了基于 LU 分解的 NR 法、NR 法(即电网侧潮流直接调用 MATPOWER 工具包计算,气网侧能流采用文献[31]的方法计算,涉及的线

性方程组求解均由 MATLAB 中反除实现)及本文所提方法在 E39-G20 综合能源测试系统和 E2383-G60 综合能源测试系统稳态能流求解的计算耗时,如表 17 所示。

表 17 不同方法求解能流时间对比
Table 17 Comparison of different methods for solving energy flow time

系统	计算耗时/s			加速比
	NR 法(LU 分解)	NR 法	所提方法	
E39-G20	0.022 9	0.023 5	0.013 4	1.709 0/1.753 7
E2383-G60	77.024 8	0.270 6	0.215 1	358.088 3/1.258 0

注:“加速比”一栏中,“/”左右分别指所提方法计算时间相对于基于 LU 分解直接法的平启动 NR 法和 MATPOWER 工具包中 NR 法计算时间的加速比。

由表 17 可知,所提方法在两个 IES 测试系统中的计算耗时均远小于基于 LU 分解的 NR 法,尤其在 E2383-G60 系统中,加速比可达 358.088 3;且所提方法计算耗时均略小于 NR 法。由此表明本文所提方法在求解 IES 能流时具有较高的计算效率。

4 结 论

本文提出了一种基于预处理 BICGSTAB 重启全纯嵌入的电-气 IES 能流计算方法,通过 E39-G20 和 E2383-G60 两个不同规模的综合能源系统对所提方法进行分析、验证,相关结论如下:

1)所提预处理器可提升收敛效果并显著提升 BICGSTAB 法求解幂级数系数方程组求解效率,与基于 LU 分解的直接法相比,求解幂级数系数方程组最多仅需迭代 6 次,在所有测试系统中求解单次方程组的最高加速比可达 149.827 6。

2)相较于 NR 法,所提基于常项值动态更新机制的 Padé 近似与 TMP 结合的电压有理逼近值计算方法具有较高计算精度,电网侧电压相角最大相对误差仅为 0.051 3%,可实现大规模电力系统潮流的准确求解。

3)所提 IES 全纯嵌入能流计算方法具有较强的鲁棒性,在重负荷、弱联络、高 R/X 及 PV-PQ 节点切换工况下,相较于 NR 法计算结果,电压相角最大相对误差仅为 0.360 9%,表明本文所提方法能够在各种工况下准确求解综合能源系统能流。

4)所提 IES 全纯嵌入能流计算方法兼具较高计算精度与计算效率,与基于 LU 分解直接法的 NR 法相比,电压相角最大相对误差仅为 0.051 3%,最高加速比达到 358.088 3,显著提升了 IES 能流计算效率,

可实现能流的准确、快速求解。

需要说明的是,虽然本文所提方法在求解综合能源系统能流时具有较高的计算精度,且相较于NR法,具有较高的计算效率,但近年来随着对全纯嵌入方式的不断研究和发展,全纯嵌入高维幂级数系数潮流方程组中系数矩阵的相关性质也在不断变化,且本文未针对所提电网侧高维幂级数系数潮流方程组进行并行求解,而随着全纯嵌入方式及相关并行计算技术的不断研究发展,如何找到最佳预处理器并进一步实现对高维幂级数系数潮流方程组的并行求解将是后续研究的重点。

利益冲突声明(Conflict of Interests):

所有作者声明不存在利益冲突。

作者贡献声明(Authors' Contributions):

曹宇鑫起草论文,修订论文,审核论文;职梦磊参与论文的审阅与修订;李雪提出研究方向,设计论文框架和研究方案,修订并审阅论文。所有作者均阅读并同意了论文终稿内容。

5 参考文献

- [1] 贾宏杰,穆云飞,余晓丹. 对我国综合能源系统发展的思考[J]. 电力建设, 2015, 36(1): 16-25.
Jia Hongjie, Mu Yunfei, Yu Xiaodan. Thought about the integrated energy system in China[J]. Electric Power Construction, 2015, 36(1): 16-25.
- [2] 王思奇,梁智娴,王致杰,等. 基于潮流和复杂网络理论的综合能源系统关键环节识别[J]. 电力科学与技术学报, 2024, 39(3): 242-252.
Wang Siqi, Liang Zhixian, Wang Zhijie, et al. Identification of key links in integrated energy system based on power flow and complex network theory [J]. Journal of Electric Power Science and Technology, 2024, 39(3): 242-252.
- [3] 冯振,阎俏,迟青青,等. 综合能源网络建模与运维技术研究综述[J]. 山东电力技术, 2024, 51(5): 9-18, 29.
Feng Zhen, Yan Qiao, Chi Qingqing, et al. A review of modeling, operation and maintenance technologies for multi-energy coupled integrated energy network[J]. Shandong Electric Power, 2024, 51(5): 9-18, 29.
- [4] 李雪,李栋,姜涛,等. 综合能源系统概率能量流的多胚解-多维全纯嵌入计算方法[J]. 中国电机工程学报, 2026, 46(7): 2882-2899.
Li Xue, Li Dong, Jiang Tao, et al. Multi-germ and multi-dimensional holomorphic embedding method for probabilistic energy flow of integrated energy system [J]. Proceedings of the CSEE, 2026, 46(7): 2882-2899.
- [5] 罗昊,王长江,王建国. 面向数字孪生的电-气综合能源系统可用输电能力计算[J]. 电力建设, 2023, 44(11): 113-127.
Luo Hao, Wang Changjiang, Wang Jianguo. Calculation of available transmission capacity of electricity-gas integrated energy system for digital twin [J]. Electric Power Construction, 2023, 44(11): 113-127.
- [6] 王英瑞,曾博,郭经,等. 电-热-气综合能源系统多能流计算方法[J]. 电网技术, 2016, 40(10): 2942-2951.
Wang Yingrui, Zeng Bo, Guo Jing, et al. Multi-energy flow calculation method for integrated energy system containing electricity, heat and gas [J]. Power System Technology, 2016, 40(10): 2942-2951.
- [7] 翁格平,任娇蓉,李琪,等. 基于改进连续牛顿法的电-气综合能源系统潮流计算[J]. 浙江电力, 2024, 43(11): 116-122.
Weng Geping, Ren Jiaorong, Li Qi, et al. Power flow calculation of electricity-gas integrated energy systems using an improved Newton-Raphson method [J]. Zhejiang Electric Power, 2024, 43(11): 116-122.
- [8] 景巍巍,王强,程好,等. 电热综合能源系统稳态与区间潮流计算快速解耦新方法[J]. 中国电力, 2024, 57(7): 203-213.
Jing Weiwei, Wang Qiang, Cheng Hao, et al. New rapid decoupling methods for calculating steady-state and interval power flow of integrated electricity-heat energy systems [J]. Electric Power, 2024, 57(7): 203-213.
- [9] 胡泉,尚策,程浩忠,等. 综合能源系统能流计算方法述评与展望[J]. 电力系统自动化, 2020, 44(18): 179-191.
Hu Xiao, Shang Ce, Cheng Haozhong, et al. Review and prospect of calculation method for energy flow in integrated energy system [J]. Automation of Electric Power Systems, 2020, 44(18): 179-191.
- [10] 张树森,段慧芹,周傲,等. 基于能流耦合机理的热电耦合综合能源系统潮流分析及对比[J]. 电网与清洁能源, 2024(4): 65-73, 83.
Zhang Shusen, Duan Huiqin, Zhou Ao, et al. Power flow analysis and comparison of thermoelectric coupling integrated energy system based on energy flow coupling mechanism [J]. Power System and Clean Energy, 2024(4): 65-73, 83.
- [11] 张萌. 电-气综合能源系统多能流计算与最优能流分析[D]. 济南: 山东大学, 2022.
Zhang Meng. Multi-energy flow calculation and optimal energy flow analysis for power-gas integrated energy system [D]. Jinan: Shandong University, 2022.
- [12] 郭伟刚,雷金勇,马溪原,等. 大规模综合能源系统电-气-热多能潮流建模与计算方法[J]. 电力系统及其自动化学报, 2019, 31(10): 96-102.
Guo Zuogang, Lei Jinyong, Ma Xiyuan, et al. Modeling and calculation methods for multi-energy flows in large-scale integrated energy system containing electricity, gas, and heat [J]. Proceedings of the CSU-EPSCA, 2019, 31(10): 96-102.
- [13] 刘健锋. 电-气区域综合能源系统能流计算及其收敛性调整[D]. 湘潭: 湘潭大学, 2021.
Liu Jianfeng. Energy flow calculation and convergence adjustment of electricity-gas regional integrated energy system [D]. Xiangtan: Xiangtan University, 2021.
- [14] 黎静华,黄玉金,张鹏. 综合能源系统多能流潮流计算模型与方法综述[J]. 电力建设, 2018, 39(3): 1-11.
Li Jinghua, Huang Yujin, Zhang Peng. Review of multi-energy

- flow calculation model and method in integrated energy system[J]. Electric Power Construction, 2018, 39(3): 1-11.
- [15] 徐宪东, 贾宏杰, 靳小龙, 等. 区域综合能源系统电/气/热混合潮流算法研究[J]. 中国电机工程学报, 2015, 35(14): 3634-3642.
- Xu Xiandong, Jia Hongjie, Jin Xiaolong, et al. Study on hybrid heat-gas-power flow algorithm for integrated community energy system[J]. Proceedings of the CSEE, 2015, 35(14): 3634-3642.
- [16] 郭东辉, 杨迪, 金旭, 等. 综合能源系统潮流分析模型与方法的研究综述[J]. 综合智慧能源, 2023, 45(10): 70-81.
- Wu Donghui, Yang Di, Jin Xu, et al. Power flow models and calculation methods applied in integrated energy systems [J]. Integrated Intelligent Energy, 2023, 45(10): 70-81.
- [17] 梁言贺, 宫游, 刘惠颖, 等. 面向大规模综合能源系统的能量流解耦分布式计算方法[J]. 电测与仪表, 2025, 62(5): 31-37.
- Liang Yanhe, Gong You, Liu Huiying, et al. Large-scale integrated energy network oriented a distributed computing approach for energy flow decoupling[J]. Electrical Measurement & Instrumentation, 2025, 62(5): 31-37.
- [18] 李雪, 李博, 姜涛, 等. 主动配电网潮流的全纯嵌入计算方法[J]. 中国电机工程学报, 2024, 44(11): 4210-4226.
- Li Xue, Li Bo, Jiang Tao, et al. A holomorphic embedding power flow algorithm for active distribution network [J]. Proceedings of the CSEE, 2024, 44(11): 4210-4226.
- [19] Trias A. The holomorphic embedding load flow method[C]//2012 IEEE Power and Energy Society General Meeting. IEEE, 2012: 1-8.
- [20] 李雪, 姚超凡, 姜涛, 等. 基于常项值和先验节点的全纯嵌入潮流计算方法[J]. 电力自动化设备, 2023, 43(2): 142-150.
- Li Xue, Yao Chaofan, Jiang Tao, et al. Constant values and priori buses based holomorphic embedding load flow method[J]. Electric Power Automation Equipment, 2023, 43(2): 142-150.
- [21] Chiang H D, Wang T, Sheng H. A novel fast and flexible holomorphic embedding power flow method[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2018, 33(3): 2551-2562.
- [22] Zhang T, Li Z G, Zheng J H, et al. Power flow analysis of integrated gas and electricity systems using the fast and flexible holomorphic embedding method[C]//2020 IEEE Power & Energy Society General Meeting (PESGM). IEEE, 2020: 1-5.
- [23] 张通. 综合能源系统运行状态分析与仿真计算方法研究[D]. 广州: 华南理工大学, 2021.
- Zhang Tong. State analysis and simulation method of integrated energy systems [D]. Guangzhou: South China University of Technology, 2021.
- [24] 张永杰, 孙秦. 大型稀疏线性方程组符号LU分解法[J]. 计算机工程与应用, 2007, 43(28): 29-30, 72.
- Zhang Yongjie, Sun Qin. Symbol LU decomposition method of large scale sparse linear equations[J]. Computer Engineering and Applications, 2007, 43(28): 29-30, 72.
- [25] 唐灿, 董树锋, 任雪桂, 等. 用于迭代法潮流计算的改进Jacobi预处理方法[J]. 电力系统自动化, 2018, 42(12): 81-86.
- Tang Can, Dong Shufeng, Ren Xuegui, et al. Improved jacobi pre-treatment method for solving iterative power flow calculation [J]. Automation of Electric Power Systems, 2018, 42(12): 81-86.
- [26] 刘珊珊, 靳松, 王文琛, 等. 基于变量相关性分解方法的稀疏线性方程组并行求解算法[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2020, 60(4): 312-320.
- Liu Shanxia, Jin Song, Wang Wenchen, et al. Parallel algorithm for solving sparse linear equations based on variable correlation decomposition [J]. Journal of Tsinghua University (Science and Technology), 2020, 60(4): 312-320.
- [27] 李建斌, 王鹏程, 傅侃, 等. 基于预处理共轭梯度迭代法的电力系统状态估计算法[J]. 电力系统自动化, 2021, 45(14): 90-96.
- Li Jianbin, Wang Pengcheng, Fu Kan, et al. State estimation algorithm of power system based on preconditioned conjugate gradient iteration [J]. Automation of Electric Power Systems, 2021, 45(14): 90-96.
- [28] Benzi M. Preconditioning techniques for large linear systems: a survey [J]. Journal of Computational Physics, 2002, 182(2): 418-477.
- [29] 林亚君, 陈学军, 陈越. 基于雅可比矩阵逆预处理的快速潮流计算方法[J]. 计算技术与自动化, 2019, 38(2): 72-75.
- Lin Yajun, Chen Xuejun, Chen Yue. Fast flow calculation method with Jacobian matrix inverse preconditions [J]. Computing Technology and Automation, 2019, 38(2): 72-75.
- [30] 李雪, 高翔, 姜涛, 等. 电力系统全纯嵌入潮流的并行计算[J]. 电工技术学报, 2024, 39(18): 5839-5854.
- Li Xue, Gao Xiang, Jiang Tao, et al. Parallel computing method of power system holomorphic embedded power flow [J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2024, 39(18): 5839-5854.
- [31] Lima G R S, Oliveira E J, Oliveira L W, et al. A novel recursive methodology for power flow analysis based on the holomorphic embedding method using the total multiplication of polynomials[J]. IEEE Access, 2025, 13: 59390-59404.
- [32] Sun Y G, Ding T, Shahidepour M. A multi-variable analytical method for energy flow calculation in natural gas systems[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2023, 38(2): 1767-1770.
- [33] 陈飞雄, 王海龙, 邵振国, 等. 基于幂级数系数分向传递的递归型电-气-热多能流算法[J]. 电网技术, 2024, 48(9): 3624-3633.
- Chen Feixiong, Wang Hailong, Shao Zhenguo, et al. Recursive multi-energy flow algorithm for electricity-gas-heat based on bidirectional transmission of power series coefficients [J]. Power System Technology, 2024, 48(9): 3624-3633.
- [34] 姜涛, 张勇, 李雪, 等. 电力系统交直流潮流的全纯嵌入计算[J]. 电工技术学报, 2021, 36(21): 4429-4443, 4481.
- Jiang Tao, Zhang Yong, Li Xue, et al. A holomorphic embedded method for solving power flow in hybrid AC-DC power system[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2021, 36(21): 4429-4443, 4481.
- [35] Wang T, Chiang H D. On the holomorphic and conjugate properties for holomorphic embedding methods for solving power flow equations [J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2020, 35(4): 2506-2515.
- [36] Ma H Z, Liu C Y, Zhao H R, et al. A novel analytical unified energy flow calculation method for integrated energy systems based on holomorphic embedding [J]. Applied Energy, 2023, 344:

- 121163.
- [37] 靳康萌, 张沛, 邓晓洋, 等. 基于 K-means 聚类技术改进的多线性蒙特卡洛概率能流算法[J]. 电网技术, 2019, 43(1): 65-73.
Jin Kangmeng, Zhang Pei, Deng Xiaoyang, et al. Improved multi-linear Monte Carlo probabilistic energy flow calculation method based on K-means clustering technique [J]. Power System Technology, 2019, 43(1): 65-73.
- [38] 张儒峰, 姜涛, 李国庆, 等. 基于最大熵原理的电-气综合能源系统概率能量流分析[J]. 中国电机工程学报, 2019, 39(15): 4430-4440.
Zhang Rufeng, Jiang Tao, Li Guoqing, et al. Maximum entropy based probabilistic energy flow calculation for integrated electricity and natural gas systems [J]. Proceedings of the CSEE, 2019, 39(15): 4430-4440.
- [39] 徐晶, 徐科, 王世举, 等. 基于分立求解的电气耦合综合能源系统多能流联合计算方法[J]. 电力系统及其自动化学报, 2022, 34(1): 114-120.
Xu Jing, Xu Ke, Wang Shiju, et al. Multi-energy flow calculation method for integrated electricity-gas system based on discrete solution [J]. Proceedings of the CSU-EPSCA, 2022, 34(1): 114-120.
- [40] 宋晓喆, 魏国, 李雪, 等. 基于预处理 BICGSTAB 法的电力系统潮流并行计算方法[J]. 电力系统保护与控制, 2020, 48(20): 18-28.
Song Xiaozhe, Wei Guo, Li Xue, et al. Parallel power flow computing in power grids based on a preconditioned BICGSTAB method [J]. Power System Protection and Control, 2020, 48(20): 18-28.
- [41] Freitas F D, Santos A C Jr, Fernandes L F J, et al. Restarted holomorphic embedding load-flow model based on low-order Padé approximant and estimated bus power injection [J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 2019, 112: 326-338.
- [42] Wei Z N, Chen S, Sun G Q, et al. Probabilistic available transfer capability calculation considering static security constraints and uncertainties of electricity - gas integrated energy systems [J]. Applied Energy, 2016, 167: 305-316.
- [43] 高翔. 大规模电力系统全纯嵌入潮流的并行计算方法研究[D]. 吉林: 东北电力大学, 2024.
Gao Xiang. Research on parallel computing method for holomorphic embedding power flow in large-scale power system [D]. Jilin: Northeast Electric Power University, 2024.

收稿日期: 2026-03-03 修回日期: 2026-04-23



曹宇鑫

作者简介:

曹宇鑫(2001),男,硕士研究生,主要研究方向为综合能源系统高性能计算;
职梦磊(2000),男,博士研究生,主要研究方向为电力系统高性能计算;
李雪(1986),女,博士,教授,博士生导师,通信作者,主要研究方向为电力系统安全性与稳定性、电力系统高性能计算、电力市场, E-mail:

xli@neepu.edu.cn。

(编辑 张小飞)

附录 A

$$\begin{cases}
 \sum_{k=1}^N Y_{ik, tr}^{sym} V_k[1] = S_i^* W_i^*[0] - Y_{i, sh} V_i[0] - \sum_{k=1}^N Y_{ik, tr}^{unsym} V_k[0] - I_i^{(0)} \\
 \sum_{k=1}^N Y_{ik, tr}^{sym} V_k[1] + j W_i^*[0] Q_l[1] = P_l W_i^*[0] - Y_{l, sh} V_l[0] - \sum_{k=1}^N Y_{lk, tr}^{unsym} V_k[0] - I_l^{(0)}, n=1 \\
 V_l[0] V_l^*[1] + V_l[1] V_l^*[0] = V_{lm}^2 - |V_l^{(0)}|^2 \\
 V_r[1] = V_r^{sp} - 1 \\
 \sum_{k=1}^N Y_{ik, tr}^{sym} V_k[n] = S_i^* W_i^*[n-1] - Y_{i, sh} V_i[n-1] - \sum_{k=1}^N Y_{ik, tr}^{unsym} V_k[n-1] \\
 \sum_{k=1}^N Y_{ik, tr}^{sym} V_k[n] + j W_i^*[0] Q_l[n] = A_l[n-1] - \sum_{k=1}^N Y_{lk, tr}^{unsym} V_k[n-1], n > 1 \\
 V_{l, re}[0] V_{l, re}[n] + V_{l, im}[0] V_{l, im}[n] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} V_l[k] V_l^*[n-k] \\
 V_r[n] = 0 \\
 A_l[n-1] = P_l W_i^*[n-1] - Y_{l, sh} V_l[n-1] - j \left(\sum_{k=1}^{n-1} Q_l[k] W_i^*[n-k] \right)
 \end{cases} \quad (A1)$$

式中: $W_i[0]$ 为 PQ 节点电压逆幂级数零阶项系数; $V_{l, re}[0]$ 为 PV 节点电压实部幂级数零阶项系数; $V_{l, im}[0]$ 为 PV 节点电压虚部幂级数零阶项系数。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (A2)$$

$$H = \begin{pmatrix} H_{(l,1),1} & H_{(l,1),2} & \cdots & H_{(l,1),(i,1)} & \cdots & H_{(l,1),(l,a)} & \cdots & H_{(l,1),(i,b)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ H_{(i,1),1} & H_{(i,1),2} & \cdots & H_{(i,1),(i,1)} & \cdots & H_{(i,1),(l,a)} & \cdots & H_{(i,1),(i,b)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ H_{(l,a),1} & H_{(l,a),2} & \cdots & H_{(l,a),(i,1)} & \cdots & H_{(l,a),(l,a)} & \cdots & H_{(l,a),(i,b)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ H_{(i,b),1} & H_{(i,b),2} & \cdots & H_{(i,b),(i,1)} & \cdots & H_{(i,b),(l,a)} & \cdots & H_{(i,b),(i,b)} \end{pmatrix} \quad (A3)$$

$$H_{(l,1),1} = \begin{pmatrix} G_{(l,1),1} & -B_{(l,1),1} \\ B_{(l,1),1} & G_{(l,1),1} \end{pmatrix} \quad H_{(i,b),(l,a)} = \begin{pmatrix} G_{(i,b),(l,a)} & -B_{(i,b),(l,a)} \\ B_{(i,b),(l,a)} & G_{(i,b),(l,a)} \end{pmatrix}$$

式中: $G_{(l,1),1}$ 为第1个PV节点与节点1之间的电导值;
 $B_{(l,1),1}$ 为第1个PV节点与节点1之间的电纳值;
 $G_{(i,b),(l,a)}$ 为第b个PQ节点与第a个PV节点之间的电

导值; $B_{(i,b),(l,a)}$ 为第b个PQ节点与第a个PV节点之间的电纳值; $H_{(l,1),1}$ 为由元素 $G_{(l,1),1}$ 和 $B_{(l,1),1}$ 组成的矩阵。

$$W[0] = \begin{pmatrix} W_{(l,1)}[0] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_{(l,a)}[0] \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, W_{(l,1)}[0] = \begin{pmatrix} W_{(l,1),im}[0] \\ W_{(l,1),re}[0] \end{pmatrix} \quad (A4)$$

$$V[0] = \begin{pmatrix} 0 & V_{(l,1)}[0] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_{(l,1)}[0] & 0 & 0 \end{pmatrix}, V_{(l,1)}[0] = (V_{(l,1),re}[0] \quad V_{(l,1),im}[0])$$

式中: $W_{(l,1)}[0]$ 为第1个PV节点电压逆幂级数零阶项系数; $W_{(l,a)}[0]$ 为第a个PV节点电压逆幂级数零阶项系数; $W_{(l,1),im}[0]$ 为第1个PV节点电压逆虚部幂级数

零阶项系数; $W_{(l,1),re}[0]$ 为第1个PV节点电压逆实部幂级数零阶项系数。

$$V[n] = (V_{1,re}[n] \quad V_{1,im}[n] \quad V_{(l,1)}[n] \quad \cdots \quad V_{(i,1)}[n] \quad \cdots \quad V_{(l,a)}[n] \quad \cdots \quad V_{(i,b)}[n])^T$$

$$Q[n] = \begin{pmatrix} Q_{(l,1)}[n] \\ \vdots \\ Q_{(l,a)}[n] \end{pmatrix} \quad (A5)$$

$$V_{(l,1)}[n] = \begin{pmatrix} V_{(l,1),re}[n] \\ V_{(l,1),im}[n] \end{pmatrix}$$

式中: $Q_{(l,1)}[n]$ 为第1个PV节点无功第n阶幂级数系数;
 $Q_{(l,a)}[n]$ 为第a个PV节点无功第n阶幂级数系数; $V_{(l,1),re}$
 $[n]$ 为第1个PV节点电压实部第n阶幂级数系数; $V_{(l,1),im}$

$[n]$ 为第1个PV节点电压虚部第n阶幂级数系数。

$$R_{slack}[n-1] = \begin{pmatrix} \delta_{n1}(V_1^{sp} - 1) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (A6)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{R}_{\text{PV}, \text{PQ}}[n-1] &= \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{(l,1)}[n-1] \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{(i,1)}[n-1] \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{(l,a)}[n-1] \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{(i,b)}[n-1] \end{pmatrix} \\ \mathbf{R}_{(l,1)}[n-1] &= \begin{pmatrix} \text{Re}(A_{(l,1)}[n-1] - \sum_{k=1}^N Y_{((l,1),k),\text{tr}}^{\text{unsym}} V_k[n-1]) \\ \text{Im}(A_{(l,1)}[n-1] - \sum_{k=1}^N Y_{((l,1),k),\text{tr}}^{\text{unsym}} V_k[n-1]) \end{pmatrix} \\ \mathbf{R}_{(i,1)}[n-1] &= \begin{pmatrix} \text{Re}(S_{(i,1)}^* W_{(i,1)}^*[n-1] - Y_{(i,1),\text{sh}} V_{(i,1)}[n-1] - \sum_{k=1}^N Y_{((i,1),k),\text{tr}}^{\text{unsym}} V_k[n-1]) \\ \text{Im}(S_{(i,1)}^* W_{(i,1)}^*[n-1] - Y_{(i,1),\text{sh}} V_{(i,1)}[n-1] - \sum_{k=1}^N Y_{((i,1),k),\text{tr}}^{\text{unsym}} V_k[n-1]) \end{pmatrix} \end{aligned} \right. \quad (\text{A7})$$

$$\mathbf{R}_{\text{PV}}[n-1] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} V_{(l,1)}[k] V_{(l,1)}^*[n-k] \\ \vdots \\ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} V_{(l,a)}[k] V_{(l,a)}^*[n-k] \end{pmatrix} \quad (\text{A8})$$

$$\mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{(l,1),2} & \cdots & \mathbf{H}_{(l,1),(i,1)} & \cdots & \mathbf{H}_{(l,1),(l,a)} & \cdots & \mathbf{H}_{(l,1),(i,b)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{H}_{(i,1),2} & \cdots & \mathbf{H}_{(i,1),(i,1)} & \cdots & \mathbf{H}_{(i,1),(l,a)} & \cdots & \mathbf{H}_{(i,1),(i,b)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{H}_{(l,a),2} & \cdots & \mathbf{H}_{(l,a),(i,1)} & \cdots & \mathbf{H}_{(l,a),(l,a)} & \cdots & \mathbf{H}_{(l,a),(i,b)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{H}_{(i,b),2} & \cdots & \mathbf{H}_{(i,b),(i,1)} & \cdots & \mathbf{H}_{(i,b),(l,a)} & \cdots & \mathbf{H}_{(i,b),(i,b)} \end{pmatrix} \quad (\text{A9})$$

$$\mathbf{V}_1[n] = (\mathbf{V}_{(l,1)}[n] \quad \cdots \quad \mathbf{V}_{(i,1)}[n] \quad \cdots \quad \mathbf{V}_{(l,a)}[n] \quad \cdots \quad \mathbf{V}_{(i,b)}[n])^T \quad (\text{A10})$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{H}_2 &= \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{21(l,1),2} & \cdots & \mathbf{H}_{(l,1),(i,1)} & \cdots & \mathbf{H}_{21(l,1),(l,a)} & \cdots & \mathbf{H}_{(l,1),(i,b)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{H}_{21(i,1),2} & \cdots & \mathbf{H}_{(i,1),(i,1)} & \cdots & \mathbf{H}_{21(i,1),(l,a)} & \cdots & \mathbf{H}_{(i,1),(i,b)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{H}_{21(l,a),2} & \cdots & \mathbf{H}_{(l,a),(i,1)} & \cdots & \mathbf{H}_{21(l,a),(l,a)} & \cdots & \mathbf{H}_{(l,a),(i,b)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{H}_{21(i,b),2} & \cdots & \mathbf{H}_{(i,b),(i,1)} & \cdots & \mathbf{H}_{21(i,b),(l,a)} & \cdots & \mathbf{H}_{(i,b),(i,b)} \end{pmatrix} \\ \mathbf{H}_{21(l,1),2} &= \begin{pmatrix} -B_{(l,1),2} \\ G_{(l,1),2} \end{pmatrix} \end{aligned} \right. \quad (\text{A11})$$

$$\mathbf{H}_{\text{PV}} = \begin{pmatrix} G_{(l,1),2} & B_{(l,1),2} & \cdots & G_{(i,1),2} & B_{(i,1),2} & \cdots & G_{(l,a),2} & B_{(l,a),2} & \cdots & G_{(i,b),2} & B_{(i,b),2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ G_{(l,1),(l,a)} & B_{(l,1),(l,a)} & \cdots & G_{(i,1),(l,a)} & B_{(i,1),(l,a)} & \cdots & G_{(l,a),(l,a)} & B_{(l,a),(l,a)} & \cdots & G_{(i,b),(l,a)} & B_{(i,b),(l,a)} \end{pmatrix}^T \quad (\text{A12})$$

$$\mathbf{V}_2[n] = (\mathbf{V}_{(l,1),\text{im}}[n] \quad \cdots \quad \mathbf{V}_{(i,1)}[n] \quad \cdots \quad \mathbf{V}_{(l,a),\text{im}}[n] \quad \cdots \quad \mathbf{V}_{(i,b)}[n])^T \quad (\text{A13})$$

$$-B = \begin{pmatrix} -B_{(l,1),2} & \cdots & -B_{(l,1),(l,a)} & \cdots & -B_{(l,1),(l,a)} & \cdots & -B_{(l,1),(i,b)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -B_{(i,1),2} & \cdots & -B_{(i,1),(i,1)} & \cdots & -B_{(i,1),(l,a)} & \cdots & -B_{(i,1),(i,b)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -B_{(l,a),2} & \cdots & -B_{(l,a),(i,1)} & \cdots & -B_{(l,a),(i,a)} & \cdots & -B_{(l,a),(i,b)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -B_{(i,b),2} & \cdots & -B_{(i,b),(i,1)} & \cdots & -B_{(i,b),(l,a)} & \cdots & -B_{(i,b),(i,b)} \end{pmatrix} \quad (A14)$$

$$G = \begin{pmatrix} G_{(l,1),2} & \cdots & G_{(l,1),(l,a)} & \cdots & G_{(l,1),(l,a)} & \cdots & G_{(l,1),(i,b)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ G_{(i,1),2} & \cdots & G_{(i,1),(i,1)} & \cdots & G_{(i,1),(l,a)} & \cdots & G_{(i,1),(i,b)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ G_{(l,a),2} & \cdots & G_{(l,a),(i,1)} & \cdots & G_{(l,a),(l,a)} & \cdots & G_{(l,a),(i,b)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ G_{(i,b),2} & \cdots & G_{(i,b),(i,1)} & \cdots & G_{(i,b),(l,a)} & \cdots & G_{(i,b),(i,b)} \end{pmatrix} \quad (A15)$$

$$G_{PQ} = \begin{pmatrix} G_{(l,1),(i,1)} & \cdots & G_{(i,1),(i,1)} & \cdots & G_{(l,a),(i,1)} & \cdots & G_{(i,b),(i,1)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ G_{(l,1),(i,b)} & \cdots & G_{(i,1),(i,b)} & \cdots & G_{(l,a),(i,b)} & \cdots & G_{(i,b),(i,b)} \end{pmatrix}^T \quad (A16)$$

$$B_{PQ} = \begin{pmatrix} B_{(l,1),(i,1)} & \cdots & B_{(i,1),(i,1)} & \cdots & B_{(l,a),(i,1)} & \cdots & B_{(i,b),(i,1)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{(l,1),(i,b)} & \cdots & B_{(i,1),(i,b)} & \cdots & B_{(l,a),(i,b)} & \cdots & B_{(i,b),(i,b)} \end{pmatrix}^T \quad (A17)$$

$$G_{PV} = \begin{pmatrix} G_{(l,1),2} & \cdots & G_{(i,1),2} & \cdots & G_{(l,a),2} & \cdots & G_{(i,b),2} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ G_{(l,1),(l,a)} & \cdots & G_{(i,1),(l,a)} & \cdots & G_{(l,a),(l,a)} & \cdots & G_{(i,b),(l,a)} \end{pmatrix}^T \quad (A18)$$

$$B_{PV} = \begin{pmatrix} B_{(l,1),2} & \cdots & B_{(i,1),2} & \cdots & B_{(l,a),2} & \cdots & B_{(i,b),2} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{(l,1),(l,a)} & \cdots & B_{(i,1),(l,a)} & \cdots & B_{(l,a),(l,a)} & \cdots & B_{(i,b),(l,a)} \end{pmatrix}^T \quad (A19)$$

$$V_{im}[n] = (V_{(l,1),im}[n] \quad \cdots \quad V_{(i,1),im}[n] \quad \cdots \quad V_{(l,a),im}[n] \quad \cdots \quad V_{(i,b),im}[n])^T \quad (A20)$$

$$V_{PQ,re}[n] = (V_{(i,1),re}[n] \quad \cdots \quad V_{(i,b),re}[n])^T \quad (A21)$$

$$W_{im}[0] = \begin{pmatrix} W_{(l,1),im}[0] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W_{(l,a),im}[0] & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \quad (A22)$$

$$W_{re}[0] = \begin{pmatrix} W_{(l,1),re}[0] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W_{(l,a),re}[0] & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \quad (A23)$$

$$R_{(PV,PQ),re}[n-1] = \begin{pmatrix} \text{Re}(A_{(l,1)}[n-1] - \sum_{k=1}^N Y_{((l,1),k),tr}^{\text{unsym}} V_k[n-1]) \\ \vdots \\ \text{Re}(S_{(i,1)}^* W_{(i,1)}^*[n-1] - Y_{(i,1),sh} V_{(i,1)}[n-1] - \sum_{k=1}^N Y_{((i,1),k),tr}^{\text{unsym}} V_k[n-1]) \\ \vdots \\ \text{Re}(A_{(l,a)}[n-1] - \sum_{k=1}^N Y_{((l,a),k),tr}^{\text{unsym}} V_k[n-1]) \\ \vdots \\ \text{Re}(S_{(i,b)}^* W_{(i,b)}^*[n-1] - Y_{(i,b),sh} V_{(i,b)}[n-1] - \sum_{k=1}^N Y_{((i,b),k),tr}^{\text{unsym}} V_k[n-1]) \end{pmatrix} \quad (A24)$$

$$\mathbf{R}_{(\text{PV}, \text{PQ}), \text{im}}[n-1] = \begin{pmatrix} \text{Im}(A_{(l,1)}[n-1] - \sum_{k=1}^N Y_{((l,1),k), \text{tr}}^{\text{unsym}} V_k[n-1]) \\ \vdots \\ \text{Im}(S_{(i,1)}^* W_{(i,1)}^*[n-1] - Y_{(i,1), \text{sh}} V_{(i,1)}[n-1] - \sum_{k=1}^N Y_{((i,1),k), \text{tr}}^{\text{unsym}} V_k[n-1]) \\ \vdots \\ \text{Im}(A_{(l,a)}[n-1] - \sum_{k=1}^N Y_{((l,a),k), \text{tr}}^{\text{unsym}} V_k[n-1]) \\ \vdots \\ \text{Im}(S_{(i,b)}^* W_{(i,b)}^*[n-1] - Y_{(i,b), \text{sh}} V_{(i,b)}[n-1] - \sum_{k=1}^N Y_{((i,b),k), \text{tr}}^{\text{unsym}} V_k[n-1]) \end{pmatrix} \quad (\text{A25})$$

$$\mathbf{V}_{\text{PV}, \text{re}}[n] = \begin{pmatrix} \delta_{n1} \frac{V_{(l,1),m}^2 - |V_{(l,1)}^{(0)}|^2}{2V_{(l,1), \text{re}}[0]} - \frac{(\sum_{k=1}^{n-1} V_{(l,1)}[k] V_{(l,1)}^*[n-k])}{2V_{(l,1), \text{re}}[0]} - \frac{V_{(l,1), \text{im}}[0] V_{(l,1), \text{im}}[n]}{V_{(l,1), \text{re}}[0]} \\ \vdots \\ \delta_{n1} \frac{V_{(l,a),m}^2 - |V_{(l,a)}^{(0)}|^2}{2V_{(l,a), \text{re}}[0]} - \frac{(\sum_{k=1}^{n-1} V_{(l,a)}[k] V_{(l,a)}^*[n-k])}{2V_{(l,a), \text{re}}[0]} - \frac{V_{(l,a), \text{im}}[0] V_{(l,a), \text{im}}[n]}{V_{(l,a), \text{re}}[0]} \end{pmatrix} \quad (\text{A26})$$

$$-\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} -B_{(l,1),2} - G_{(l,1),2} \frac{V_{(l,1), \text{im}}[0]}{V_{(l,1), \text{re}}[0]} & \cdots & -B_{(l,1), (l,a)} & \cdots & -B_{(l,1), (l,a)} - G_{(i,1), (l,a)} \frac{V_{(l,a), \text{im}}[0]}{V_{(l,a), \text{re}}[0]} & \cdots & -B_{(l,1), (i,b)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -B_{(i,1),2} - G_{(i,1),2} \frac{V_{(l,1), \text{im}}[0]}{V_{(l,1), \text{re}}[0]} & \cdots & -B_{(i,1), (i,1)} & \cdots & -B_{(i,1), (l,a)} - G_{(i,1), (l,a)} \frac{V_{(l,a), \text{im}}[0]}{V_{(l,a), \text{re}}[0]} & \cdots & -B_{(i,1), (i,b)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -B_{(l,a),2} - G_{(l,a),2} \frac{V_{(l,1), \text{im}}[0]}{V_{(l,1), \text{re}}[0]} & \cdots & -B_{(l,a), (i,1)} & \cdots & -B_{(l,a), (l,a)} - G_{(l,a), (l,a)} \frac{V_{(l,a), \text{im}}[0]}{V_{(l,a), \text{re}}[0]} & \cdots & -B_{(l,a), (i,b)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -B_{(i,b),2} - G_{(i,b),2} \frac{V_{(l,1), \text{im}}[0]}{V_{(l,1), \text{re}}[0]} & \cdots & -B_{(i,b), (i,1)} & \cdots & -B_{(i,b), (l,a)} - G_{(i,b), (l,a)} \frac{V_{(l,a), \text{im}}[0]}{V_{(l,a), \text{re}}[0]} & \cdots & -B_{(i,b), (i,b)} \end{pmatrix} \quad (\text{A27})$$

$$\mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} G_{(l,1),2} - B_{(l,1),2} \frac{V_{(l,1), \text{im}}[0]}{V_{(l,1), \text{re}}[0]} & \cdots & G_{(l,1), (i,1)} & \cdots & G_{(l,1), (l,a)} - B_{(l,1), (l,a)} \frac{V_{(l,a), \text{im}}[0]}{V_{(l,a), \text{re}}[0]} & \cdots & G_{(l,1), (i,b)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ G_{(i,1),2} - B_{(i,1),2} \frac{V_{(l,1), \text{im}}[0]}{V_{(l,1), \text{re}}[0]} & \cdots & G_{(i,1), (i,1)} & \cdots & G_{(i,1), (l,a)} - B_{(i,1), (l,a)} \frac{V_{(l,a), \text{im}}[0]}{V_{(l,a), \text{re}}[0]} & \cdots & G_{(i,1), (i,b)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ G_{(l,a),2} - B_{(l,a),2} \frac{V_{(l,1), \text{im}}[0]}{V_{(l,1), \text{re}}[0]} & \cdots & G_{(l,a), (i,1)} & \cdots & G_{(l,1), (l,1)} - B_{(l,1), (l,a)} \frac{V_{(l,a), \text{im}}[0]}{V_{(l,a), \text{re}}[0]} & \cdots & G_{(l,a), (i,b)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ G_{(i,b),2} - B_{(i,b),2} \frac{V_{(l,1), \text{im}}[0]}{V_{(l,1), \text{re}}[0]} & \cdots & G_{(i,b), (i,1)} & \cdots & G_{(i,b), (l,a)} - B_{(i,b), (l,a)} \frac{V_{(l,a), \text{im}}[0]}{V_{(l,a), \text{re}}[0]} & \cdots & G_{(i,b), (i,b)} \end{pmatrix} \quad (\text{A28})$$

$$\mathbf{V}_{\text{PV1}, \text{re}}[n] = \begin{pmatrix} \delta_{n1} \frac{V_{(l,1)}^2 - |V_{(l,1)}^{(0)}|^2}{2} - \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n-1} V_{(l,1)}[k] V_{(l,1)}^*[n-k] \right) \\ \vdots \\ \delta_{n1} \frac{V_{(l,a)}^2 - |V_{(l,a)}^{(0)}|^2}{2} - \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n-1} V_{(l,a)}[k] V_{(l,a)}^*[n-k] \right) \end{pmatrix} \quad (\text{A29})$$